5. F. 280

Digitized by Google

Digitized by Google

JOSEPH MARIÆ

TOZZI

GEOMETRICÆ
INSTITUTIONES

AD USUM

AUDITORUM SUORUM.

BONONIÆ

Ex Typographia Lælii a Vulpe.)(*1753*)(

SUPERIORUM PERMISSU.

Digitized by Google

AUDITORIBUS SUIS

JOSEPH MARIA TOZZI.

QUi privatum ſcriptum Typis edat publice, ſunt qui putent, eum ſic Literatos omnes ad legendum provocare, ut nihil ita edendum cenſeant, niſi magnum, & novum, tantaque dignum provocatione. quæ opinio apud nos Bononienſes vigere maxime videtur, qui cum multa in dies non ſcriptitemus modo, verum etiam pluribus communicemus, id malumus diuturno, improboque labore pluries repetitæ ſcriptionis, quam commodiſſimo, breviſſimoque Typorum uſu, quaſi quandam in his dignitatem verentes, ne ſcriptis noſtris commovendæ expectationi non reſponſuris lædatur: contingit enim vel ſtudioſiſſimis gentibus quam ra-

rariſſime, ut excogitetur quidquam, quod magnum doctis videatur, & novum. E contrario Tranſalpini, qui nihil fere ſcribunt, ut ad multos perveniat, quod non Typis multiplicandum committant, putare videntur, hunc uſum non ad ciendam expectationem, ſed ad laboris compendium pertinere: neque enim ſunt noſtris adeo feliciores, ut arcana paſſim, & egregia ſcribant; neque adeo rerum imperiti, ut vel humilia, vel nota pro ſummis habeant, & ignotis. Horum opinio temperantior multo, magiſque e rei natura mihi quidem videtur: an ne arbitramini Typorum artem ſemel inventam ad tantam fuiſſe celebritatem tam cito perventuram, ſi talis eſſet initio viſa, quæ ter quaterve quoque ſeculo uſuveniret? neque veniret pluries, ſi ad eximia tantum, & ſingularia fuiſſet nata: ſcilicet prodiens hæc Ars, pollicebatur Hominibus, omnia ſcripturæ commoda ſe præſtituram, his additis, quod minore ſumptu, nulloque labore: quæ parcitatis ſumptuum, & laborum commendatio, cum plurimum ſemper apud Homines valuerit, mirificum excitavit hu-

jus

jus artis deſiderium, omniumque ſtudia ab antiqua ſcribendi induſtria ad ſuccedentem artem commodiſſimam arripuit: quare qui Typis pro ſcriptione utitur, id tandem agit, ut ad eaſdem utilitates obtinendas commoditatem præferat labori, quod nec ipſi Stoici reprehendere velint, cæteri porro Homines potius reprehendant contrarium. Quamobrem cum ea ſim in vos voluntate, ut nolim, quemadmodum ajebat ille, vobis ullum commodum in me claudier, non ſum paſſus, in his Geometricis Inſtitutionibus tranſcribendis non mediocriter vobis elaborandum, quæ neque tranſcribi ſine mendo poſſunt, & unius litteræ, numerive mendum rem totam plerunque implicat, atque conturbat; maxime cum omni vos labore, & periculo tam facile liberare poſſem, & liceret etiam, quantum ego exiſtimo, ſine juſta reprehenſione: Nam illi etiam, qui in hujuſmodi editionibus ſemper magnum aliquid quærendum putant, ne harum inſtitutionum tenuitati iraſcantur, quibus ſane nihil poteſt eſſe tenuius, potiſſimum in tanta Rerum Geometricarum ſublimitate, atque amplitudine, cu-

Chremes apud Teren.

curavi, ut ipſe Libri titulus moneret, quibus ille ederetur, ut in eo, cum non id iſti invenerint, quod quærebant, non mihi, ſed ſibi ſuccenſere debeant, qui ea legere voluerint, quæ ſibi nec erant ſcripta, nec edita. Vobis vero, quibus hæc ſcripta, atque edita ſunt, non hinc modo accipitis, quod ad Phyſicas inſtitutiones feliciter addiſcendas vos comparet, verum etiam perſpicitis, quæ mea ſit cum in veſtram eruditionem, tum etiam in veſtra commoda voluntas, cui ſi, quam cupio gratiam, referre velitis, parem vos ad veſtram eruditionem, & commoda voluntatem afferte.

GEO.

GEOMETRICÆ
INSTITUTIONES.

QUæ Phyſicæ ſit & Geometriæ arctiſſima complexio, ex eo intelligi facile poteſt, quod Phyſica doctrina ſit de Corporibus, Geometria vero de Extenſione, quæ inter Corporis proprietates eſt præcipua. Hinc noſtris quidem temporibus, quod & de Græcis accepimus, Geometria ita in univerſam Phyſicam dominatur, ut ea non præeunte tertio quoque paſſu hærendum ſit: quod cum turpe ſit, & progreſſioni diſcendi maxime adverſum, Geometricas Inſtitutiones Phyſicis præmittam: at quidem compendio, nam neque Elementa præteream, neque in his ipſis Euclideam Methodum perſequar, quæ cum receptiſſima ſit, & optima, eſt tamen prolixior, quam noſtrum poſtulet propoſitum. Igitur ex Euclide quæ Propoſitiones viſæ fuerint ſcitu maxime ne-

ceſſariæ, & utiles Phyſicam adeuntibus, eas noſtro quodam ordine exponemus: diſcentium autem commodo conſulentes ſingulis propoſitionibus ad marginem adnotabimus, quo libro ea ſit, quoque numero apud Euclidem. Itaque Phyſicis Inſtitutionibus factum erit ſatis: nam ampliora reliqua & penitiora a Geometris ſunt petenda.

Licet multa ſint in Corpore præter Extenſionem; attamen cum hanc unam ſpectent Geometræ, ubi Longitudinem, Latitudinem, & Profunditatem, perfectam nempe Extenſionem animo conceperint, videntur ſibi concepiſſe Corpus, itaque definiunt:

Definitiones.

Corpus ſive Solidum Mathematicum. 1 Corpus, ſeu ſolidum eſt, *quidquid longum eſt, latum, & profundum*, quod Corpus ne quis forte Phyſicum illud putet, Mathematicum nuncupatur.

Superficies. 2 At *Longitudinem & Latitudinem ſine Profunditate* Superficiem appellant.

Linea. 3 *Solam* vero *Longitudinem ſine Latitudine & profunditate* Lineam.

4 Quod

4 Quod ſi in Corpore fingas animo *quidpiam, quod & Longitudine careat & Latitudine & Profunditate*, id Punctum appellant, quod faciunt eſſe Extenſionis quaſi initium, ſicuti Unitas initium eſt Numeri. Punctum.

5 Linearum aliæ Rectæ ſunt, aliæ Curvæ. Rectæ, *quæ ita æque procedunt ſemper, ut ad alterutram partem nihil declinent* (*fig.* 1.): Curvæ *quæcunque rectæ non ſunt* (*fig.* 2.). Linea Recta. Curva.

6 *Si duæ Lineæ in idem punctum conveniant, quin ex duabus in unam rectam evadant* Angulum faciunt, *cujus ſi utraque Linea eſt recta*, Angulus dicitur Rectilineus (*fig.* 3.) *ſi utraque curva*, Curvilineus (*fig.* 4.) *ſi altera recta, curva altera* Mixtus dicitur (*fig.* 5.). Angulus. Rectilineus. Curvilineus. Mixtus.

7 Crura Anguli ſunt *Lineæ ipſum facientes*. Anguli Crura.

8 Vertex Anguli eſt *Punctum, quo Crura conveniunt*, ut fig. 3. punctum *a*. Vertex.

Anguli denotari ſolent vel unica littera ſive Vertici præpoſita, ut fig. 3. a, ſive inter Crura Vertici appoſita, ut fig. 4. e: vel tribus litteris, quarum media Anguli Verticem notat, ut fig. 6. Angulus abc aut abd.

Perpendicularis.

9 *Si Recta quævis* ab (*fig.* 6.) *ita Rectæ cuivis alteri* cd *inſiſtat, ut in neutram partem inclinet præ altera*, Recta ita inſiſtens Perpendicularis dicitur.

Perpendicularis ſecundum Normam expeditiſſime ducitur.

Angulus Rectus.

10 *Hæc binos utrinque Angulos æquales facit* abc, abd (*fig.* 6.) quorum quilibet Rectus eſt.

Obtuſus.

11 At Angulus Obtuſus eſt *qui Recto eſt major*, ut Ang. efg (*fig.* 7.).

Acutus.

12 Acutus *qui Recto eſt minor ut* efh (*fig.* 7.).

Anguli Obliqui.

Anguli ſive Obtuſi, ſive Acuti ad differentiam Rectorum Obliqui vocantur.

Scholium.

lib. 1. prop. 13.

1 Quæcumque recta rectæ inſiſtat, angulos duos aut rectos, aut duobus rectis æquales facit. Nam

Si perpendiculariter inſiſtat, ut af (*fig.* 7.) duos rectos angulos facit (1). Sin Oblique ut ef, ad punctum f ducta eſto perpendicularis af, anguli obliqui efh, efg eundem locum occu-

(1) *per defin. 9.*

cu-

Digitized by Google

cupant, quam Recti duo afh, afg: ergo ſunt his æquales.

2 Eadem ratione ſi duæ Rectæ dm, im (*fig.* 8.) vel plures eidem rectæ bc ad idem punctum m inſiſtant, angulos faciunt duobus rectis æquales.

13 Rectæ Lineæ dicuntur Parallelæ *cum ad eandem plagam ſpectantes ambæ æqualibus ubique diſtant intervallis*, ut rectæ il, mn (*fig.* 9.) ex quo conſequens eſt, ut in infinitum licet productæ nullibi tamen ſint conventuræ. Parallelæ.

Intervalla metimur Perpendicularibus, quæ rectarum omnium, quæcunque ab una ad alteram rectam duci poſſint, breviſſimæ ſunt: igitur ſi quæ perpendiculares ab altera ex duabus rectis il, mn duci poſſunt, omnes fuerint æquales, rectæ ſunt Parallelæ. Hæc de Lineis, nunc ad ſuperficies.

14 Superficies plana, ſeu Planum eſt *quod ex recto fluxu rectæ Lineæ efformari intelligitur* (*fig.* 10.). Superficies Curva, *quæ plana non eſt*, uti ſpherarum ſuperficies. Planum.

15 Figura vero plana dicitur *Superficies plana una vel pluribus lineis concluſa; quæ lineæ ſi rectæ ſint*, Figura dici- Figura plana.

Rectilinea. Curvilinea. dicitur Rectilinea (*fig.* 10.) ut Curvilinea *ſi curva*.

16 Figurarum omnium rectilinearum ſimpliciſſima eſt Triangulum, ſive Trilaterum, nempe *plana ſuperficies tribus rectis concluſa* (*fig.* 11.). Triangulum.

17 Cujus tria latera, *trinæ* ſcilicet *rectæ Triangulum conſtituentes ſi invicem æquales erunt*, Triangulum erit Æquilaterum (*fig.* 11.). Æquilaterum.

18 Iſoſceles autem, ſeu æquicrure *ſi bina tantum latera ſint æqualia* (*fig.* 12.). Iſoſceles.

19 Uti Scalenum *ſi tria latera ſint inæqualia* (*fig.* 14.). Scalenum.

20 *Angulorum* vero *Trianguli ſi unus ſit rectus*, Triangulum dicitur Rectangulum (*fig.* 14.). Rectangulum

21 Obtuſangulum; *ſi unus ſit Obtuſus* (*fig.* 15.). Obtuſangulum.

22 At Acutangulum dicitur Triangulum *cum tres quos habet Angulos Acuti ſunt* (*fig.* 11. & 12.). Acutangulum.

23 Quod *ſi Figuræ* non tribus, ſed *quatuor lineis conſtent*, Quadrilateræ dicuntur. Quadrilaterum autem *Angulos habens rectos adeoque æquales*, ſive Latera æqualia ſint, ſive inæqualia dicitur Rectangulum (*fig.* 10.). Quadrilaterum. Rectangulum.

24 *Si* vero *Quadrilaterum non angulos modo rectos, proindeque æquales, ſed latera quoque habeat æqualia*, adeoque & æquiangulum ſit, & æquilaterum; Quadratum dicitur (*fig.* 13.) ex quo ſequitur Quadratum omne rectangulum eſſe, non autem contra. **Quadratum.**

25 Rombus eſt *quadrilaterum æquilaterum, at non æquiangulum* (*fig.* 16.). **Rombus.**

26 Romboides eſt *quadrilaterum neque æquilaterum, neque æquiangulum, cujus bina adverſa latera* (*fig.* 17.) ab, dc, & ad, bc, *adverſique anguli* a, c, & b, d *æquales ſunt*. **Romboides.**

27 *Sin adverſa quoque latera, adverſive anguli inæquales ſint*, Trapezium dicitur (*fig.* 21.). **Trapezium.**

28 *Si quadrilateri bina oppoſita latera* (*fig.* 17.) ab, dc, & ad, bc *fuerint parallela*, Parallelogrammum appellabitur. Hinc Quadratum omne Parallelogrammum eſt, non autem contra. **Parallelogrammum.**

29 Parallelogrammi itemque cujuſvis quadrilateri Diameter, ſeu Diagonalis eſt (*fig.* 18.) *recta* ef *ab angulorum alterutro ad oppoſitum ducta*. **Diameter ſeu Diagonalis.**

30 *Figuræ planæ pluribus quam quatuor*

tuor lateribus conſtantes Multilateræ, ſeu Multangulæ, ſeu Polygonæ dicuntur (*fig.* 19.).

Polygonæ.

31 *Quæ Figura æquilatera, & æquiangula eſt*, Ordinata, ſeu Regularis appellatur (*fig.* 13.).

Ordinata ſeu Regularis.

32 Angulus externus eſt *qui fit quolibet figuræ latere producto* (*fig.* 20.) ut aci, die, bec.

Angulus externus.

33 Curvilinearum porro Figurarum potiſſima eſt Circulus: *Plana* ſcilicet *ſuperficies unius lineæ circuitu comprebenſa* (*fig.* 22.) *hac lege, ut aliquod ſit in comprebenſo plano punctum* B, *a quo rectæ omnes, quæ ad eam lineam duci queant* ba, bf, bl, bc, *æquales ſint*.

Circulus.

34 *Linea comprebendens* afl c d Circuli Circumferentia dicitur ſeu Peripheria.

Circumferentia ſeu Peripheria.

35 Punctum vero B mox deſignatum dicitur Centrum.

Centrum.

36 Diameter Circuli eſt *recta* ac *per Centrum* B *ducta, & Circumferentia utrinque terminata*.

Diameter.

37 Hæc in duas æquales partes afl c, & adc Circulum dividit, quæ Semicirculi vocantur.

Semicirculi.

38 Semidiameter ſeu Radius Circuli eſt

Semidiameter ſeu Radius.

eſt *recta a Centro ad Circumferentiam ducta* ut ba, bf, bl, bc; proindeque ejuſdem Circuli ſemidiametri, ſeu radii omnes æquales ſunt.

39 *Si Circulus* cſeq *in duas ſecetur partes* per rectam ce (*fig.* 23.); *partes illæ* cqe, cſe Segmenta Circuli appellantur, quorum recta ce baſis eſt. Segmenta.

40 *Peripheriæ vero Partes* cqe, cſe Arcus Circuli appellantur, eorum autem recta ce Corda ſeu Subtenſa. Arcus. Corda ſeu Subtenſa.

41 *Angulus* bac (*fig.* 24.) *qui Verticem habet in Centro*, dicitur Angulus ad Centrum. *Angulus* vero bfc *qui Verticem habet in Peripheria*, Angulus ad Peripheriam. Angulus ad Centrum, ad Peripheriam.

42 Angulus bac, vel bfc inſiſtere dicitur *Arcui* bc *qui ſuis cruribus intercipitur*, *Anguloque eſt oppoſitus*. (*fig.* 24, 25, 26). Arcui inſiſtens.

43 Angulus eſt in Segmento bfc qui verticem habet in ejus ſegmenti arcu bfc, crura vero ad ejus arcus terminos uſque bc producta. Angulus in Segmento.

44 Sector eſt *pars Circuli duabus Semidiametris* ab, ac, *&* *arcu* bc *comprehenſa* (*fig.* 24, 25, 26). Sector Circuli.

45 Ratum eſt inter Geometras quamlibet Circuli Peripheriam in 360 æquales partes dividere, quæ Peripheriæ Gradus appellantur.

Gradus Peripheriæ.

46 Denique Propoſitiones, quæ faciendum aliquid proponunt, Problemata; quæ vero hujuſmodi non ſunt, ſed verum aliquod tantummodo cognoſcendum proponunt, Theoremata appellantur.

Problemata.

Theoremata.

Ac primum nonnullæ ſunt Propoſitiones, quarum veritas cum nullo negotio cuique appareat, pro Axiomatibus, ſeu principiis per ſe notis habentur jure a Geometris. Hujuſmodi fere ſunt.

Axiomata.

1 Quæ eidem ſunt æqualia, vel ſimilia, & ſibi invicem æqualia vel ſimilia ſunt.

2 Si quid altero duorum æqualium majus, minuſve eſt, altero item majus minuſve erit.

3 Si æqualibus addas æqualia, adhuc erunt æqualia.

4 Si æqualibus demas æqualia, quæ remanent ſunt æqualia.

5 Si

5 Si inæqualibus addas æqualia, adhuc erunt inæqualia.

6 Si inæqualibus demas æqualia, quæ remanent ſunt inæqualia.

7 Quæ ejuſdem, vel æqualium dimidia ſunt, vel dupla, vel tripla, vel quadrupla &c. inter ſe æqualia ſunt: & quæ inæqualium ſunt dimidia, vel dupla &c. inter ſe inæqualia ſunt.

8 Totum ſua parte majus eſt, æquale vero partibus ſuis omnibus ſimul ſumptis.

9 Linearum omnium, quæ inter duo puncta duci poſſint, Recta eſt breviſſima.

10 Parallelæ communem habent Perpendicularem, hoc eſt, quæ recta uni ex parallelis perpendicularis eſt, erit item alteri.

11 Perpendiculares binæ (*fig*. 27.) ab, cf ex parallelis cd, gh æquales utrinque intercipiunt partes ac, bf.

12 Quæ ſibi invicem congruunt æqualia ſunt.

Scholium.

1 Hinc ſi Trianguli X (*fig*. 28.) latus ba lateri fl Trianguli Z æquale fuerit, itemque latus primi ca Lib.1.Prop.4.

lateri il ſecundi æquale fuerit, angulique a, & l iis lateribus facti æquales fuerint reliqua omnia adeoque & ipſa Triangula erunt æqualia.

Nam ſi Triangula ſibi invicem imponentur ita, ut latera ab, & lf congruant, congruent, & reliqua ergo (1) Triangula æqualia erunt.

(1) *per Axio. 12.*

2 Eadem ratione æqualia demonſtrantur Triangula X, & Z, quæ latera habeant bc, fi æqualia, anguloſque iis lateribus adjacentes ſingulos ſingulis æquales nempe b æqualis f & c æqualis i.

Congruent enim æqualia latera bc, fi ſibi invicem impoſita, tum vero propter angulos b & f, c & i æquales latus ba in ipſum fl, & ca in il incidet, punctumque a in l ergo congruent Triangula eruntque æqualia.

Lib. 1. Prop. 5. 3 Trianguli Iſoſcelis ad baſim anguli ſunt æquales.

Eſto Triangulum Iſoſceles abc (*fig.* 29.) bis poſitum, ſed ſitu converſo, ut ſit abc, *cba*. In duobus triangulis latera *ab* & cb. *cb* & ab æqualia ſunt, æqualeſque anguli iis lateribus facti b & *b* æquales, ergo (2) Triangula ſunt æqua-

(2) *per num. 1. huj. Schol.*

æqualia, & angulus a, angulo c æqualis.

4 Hinc æquilaterum Triangulum erit & æquiangulum.

5 Eadem fere ratione oſtendes ſi in Triangulo ſit angulus a angulo c æqualis, iis angulis oppoſita latera ab, cb æqualia fore. *Lib.1.Prop.6.*

Bis enim poſito Triangulo, ut ſupra jam latera ac, & *ca* ſunt æqualia, æqualeſque adjacentes anguli a & *c* & *a* ergo omnia ſunt æqualia (1) & latus ab, lateri bc æquale. *(1) per num. 2. huj. Schol.*

6 Equiangulum ergo Triangulum erit & Æquilaterum.

7 Circuli, quorum æquales ſunt Diametri vel Semidiametri, & ipſi æquales ſunt: congruent enim: ideo & æqualium Circulorum æquales ſunt Diametri vel Semidiametri.

8 In eodem vel in æqualibus Circulis (*fig.* 30.) ſi Chordæ ce, ad ſint æquales, earum Arcus cſe, afd, vel cqe, abd ſunt æquales; & ſi Arcus æquales ſunt, æquales item Chordæ. *Lib. 3. Prop. 26. & 27.*

Cum enim Circuli æquales ſint, ſunt item æquales ſemidiametri, quæ a Centris ad puncta c & e, a & d duci poſ-

ſunt. Si ergo Circulus q Circulo b imponetur ita, ut æquales ce, ad congruant, convenient Circulorum centra, & congruent Peripheriæ, & punctum c erit in puncto a, & e in d, adeoque congruent Arcus cqe, abd, & cſe, afd.

Pariter ſi Circulus q ita Circulo b imponatur, ut æquales Arcus cſe, afd congruant; punctum c erit in puncto a, & e in d, adeoque congruent & rectæ ce, ad.

Sunt item nonnulla, quæ cum facile fieri poſſe, cuique ſit manifeſtum, ut talia habeantur, factu nimirum facilia, jure poſtulant Geometræ, ideoque dicuntur

Poſtulata.

1 Nempe a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam duci.

2 Rectam lineam terminatam quantumlibet produci.

3 A quovis Centro quovis intervallo Circulum deſcribi.

Pro-

Propoſitio 1.

Si duo Triangula* X, Z (*fig.* 28.) *habeant omnia latera ſibi mutuo æqualia nempe* ab *&* lf*:* bc *&* fi*:* ac *&* li*; Angulos quoque æqualibus lateribus oppoſitos æquales habent nempe* b *&* f*:* c *&* i*:* a *&* l, *ipſaque Triangula ſunt æqualia. Lib.1.Prop.8.

Triangula ſibi invicem imponantur ita, ut latera bc, fi invicem æqualia congruant, jam & punctum b puncto f & c, i conveniet; quod ſi & punctum a puncto l convenerit, Triangula congruent. Convenit autem: nam ſi centro f radio fl deſcribas Circulum, itemque centro i radio il alium deſcribas Circulum, punctum l rectæ fl erit in ſui Circuli Circumferentia, itemque in ſui Circumferentia punctum l rectæ il, quæ duo puncta convenient in ipſa Circulorum interſectione. Jam vero cum per hypotheſim ſibi invicem impoſitis Triangulis X, Z conveniant puncta b & f, c & i, ſi eodem centro f radio ba, & centro i radio ca Circulos deſcribas, cum & centra eadem, & radios habeant prioribus æquales per hypotheſim, convenient hi Circuli cum

prioribus, punctumque a erit in Circulorum interſectione, adeoque in ipſo puncto l. Congruent ergo Anguli a & l, b & f, c & i, æqualibus lateribus oppoſiti, totaque ipſa Triangula congruent, adeoque erunt æqualia. (1)

(1) *per Axio.* 12.

SCHOLIUM.

Lib.1.Prop.9. 1 DAtum angulum a c b (*fig.* 45.) in duos divides æquales angulos, Si a vertice c ſumptis utrinque æqualibus crurum portionibus c a, c b centris a & b per radios a d, b d ſumptis crurum portionibus c a a b æquales circulos deſcribas ſe invicem ſecantes in d. ducta enim d c angulum a c b in duos dividet æquales angulos.

Triangula enim c a d, c b d, cum ex ſuperius demonſtratis ſint æquilatera, angulos habent a c d, b c d, qui æqualibus lateribus opponuntur, æquales (2).

(2) *per Prop.* 1.

2 Datam rectam a b in duas æquales partes dividere.

Centro a & centro b eodem intervallo a b duos deſcribe æquales circulos ſe invicem ſecantes in c: junge a c, b c: Angulum a c b biſeca (3) per rectam c d. hæç datam a b in duas æquales partes per e partitur. Trian-

(3) *per antec.*

Triangula enim a c e, e c b latera habent a c, c b æqualia (1) & tertium c e, commune, anguloſque iis lateribus factos æquales (2) ergo triangula ſunt æqualia (3) adeoque & rectæ a e, e b æquales.

(1) *per defin.* 38.

(2) *per conſtr.*

(3) *per 1. Sch. anteced.*

Propoſitio 2.

In omni Triangulo (fig. 31.) Angulus a, *qui majori lateri* b o *opponitur, major eſt Angulo* b, *qui minori lateri* a o *opponitur.*

Lib. 1. Prop. 18. & 19.

Et latus b o, *quod majori Angulo a opponitur, majus eſt latere a o quod minori* b.

Prima pars. Nequit ang. a eſſe b æqualis, nam (4) latera a o, b o æqualia eſſent contra hypot. Nequit ang. b major eſſe a, poſſet enim ab angulo b angulo a æqualis auferri v. g. a b f. tum vero latera a f, b f æqualia forent, (4) quibus ſingulis ſi adderetur commune f o, æqualia eſſent a f o, & b f o, atqui a f o minor b o per hypot. ergo & b f o minor b o contra axioma 9. nequit ergo Angulus a neque æqualis eſſe, neque minor angulo b. ergo major. q. e. d.

(4) *per Sch. 5. Axio. 12.*

Secunda pars. Latus b o non eſt minus a o, eſſet enim (5) angulo a minor

(5) *per prim. partem.*

b contra hypot. bo non eſt æquale a o, eſſent enim (1) æquales anguli a & b contra hypot. ergo latus bo majus ao. q. e. d.

(1) *per Sch.3. Axio.12.*

Propoſitio 3.

Lib. 1. Prop. 15.

Si duæ rectæ bc, fl (*fig.*32.) *ſecentur invicem in* a, *anguli ad verticem* a *oppoſiti nempe* fac *&* bal: lac *&* baf *æquales ſunt*.

Anguli bal, lac ſunt duobus rectis æquales (2) itemque duobus rectis æquales ſunt lac, caf (2) ergo bini bal, lac binis lac, caf æquales ſunt (3) quibus ſi communem angulum lac demas, qui ſuperſunt bal, fac æquales ſunt (4). Eodem modo & anguli baf, lac æquales demonſtrantur.

(2) *per Sch.1. ad defin.12.*
(3) *per Axio. 1.*
(4) *per Axio. 4.*

Propoſitio 4.

Lib. 1. Prop. 27.

Si duas rectas parallelas ab, ef (*fig.* 33.) *ſecet recta* go *ſunt*

1 *Æquales alterni anguli* rlo, loq: *itemque* blo, loc:

2 *Externus* glb *æqualis interno ad eandem partem* lof, *itemque* gla, loc.

3 *Duo ſimul interni ad eandem partem* rlo, loc, *vel* blo, loq *duobus rectis æquales*.

Pri-

Prima pars. A punctis o & l ductæ ſint o r, l q perpendiculares. Triangula X, Z habent latera o r, l q æqualia (1) æqualia item latera o q, r l (2), latus vero o l commune, ſunt ergo æquilatera, ergo anguli r l o, l o q parallelarum ſcilicet alterni æqualibus lateribus o r, l q oppoſiti æquales ſunt (3), & cum b l o, r l o duobus rectis æquales (4) æquales item ſint duobus rectis c o l, l o q, erunt duo ſimul b l o, r l o duobus ſimul c o l, l o q æquales (5) quibus ſi æquales demas r l o, l o q, qui ſuperſunt alterni parallelarum anguli b l o, c o l æquales erunt (6) q. e. d.

Secunda pars. Externus g l b æqualis eſt angulo ſibi ad Verticem oppoſito r l o (7) r l o æqualis eſt angulo l o q (8) huic ergo æqualis quoque g l b, idem dicito de Angulis g l r, l o c.

Tertia pars a l o, l o q æquales ſunt (8) l o q cum l o c duobus rectis ſunt æquales (4) ergo & a l o cum l o c duobus rectis æquales, idem dicito de b l o, l o q. q. e. d.

(1) *per defin.* 13.
(2) *per Axio.* 11.
(3) *per prop.* 1.
(4) *per Sch.* 1. *ad defin.* 12.
(5) *per Axio.* 2.
(6) *per Axio.* 4.
(7) *per prop.* 3.
(8) *per prim. part. hujus.*

Scholium.

Lib. 1. prop. 28. & 29.

SI duas rectas d e, h m (*fig.* 34.) ſecans recta n i vel alternos angulos æquales fecerit d u n, u n m, vel externum angulum i u d interno ad eandem partem u n h æqualem, vel duos internos ad eandem partem d u n, u n h duobus rectis æquales; rectæ d e, h m ſunt parallelæ.

Quæcunque alia recta exempli cauſa p ſ per punctum u l ducta ſit, hæc angulum faciet p u n angulo d u n vel majorem vel minorem, ſi enim æqualis foret, duæ rectæ p ſ, d e convenirent, at per hypot. d u n & u n m æquales ſunt, ergo illo major vel minor p u n non erit alterno u n m æqualis: non erunt igitur rectæ p ſ h m parallelæ (1) at per punctum u duci poteſt parallela ad h m, quid enim prohibet? ergo parallela erit ſola d e, quæ ſecta per rectam n i alternos angulos habet æquales. Idem omnino de angulis tum externis tum internis demonſtrari poteſt.

(1) *per prop. 46.*

Pro-

Propoſitio 5.

1 *Cujuſcumque Trianguli quilibet externus angulus* f b c (*fig.* 35.) *duobus internis oppoſitis* a *&* c *æqualis eſt.* Lib. 1. prop. 32.

2 *Cujuſcunque Trianguli tres ſimul Anguli duobus rectis ſunt æquales.*

Prima pars. Ducta ſit b l parallela ad a c: has ſecat a b ergo externus angulus f b l interno a æqualis eſt (1) eas item parallelas ſecat recta b c ergo alternus angulus l b c alterno c æqualis eſt (1), Anguli igitur f b l, & l b c, hoc eſt f b c duobus internis oppoſitis a & c æqualis eſt. q. e. d.

(1) per prop. 4.

Secunda pars. Per Verticem anguli q (*fig.* 36.) ducta ſit recta h m rectæ a c parallela: duo ſimul Anguli o & n duobus ſimul alternis a & c æquales ſunt (1) at o & n cum q ſunt duobus rectis æquales (2) ergo etiam a & c cum q duobus rectis æquales ſunt q. e. d.

(2) per Sch. 1. ad defin. 12.

Corollaria.

1 TRianguli externus angulus f b c (*fig.* 35.) ſingulis internis oppoſitis a vel c major eſt.

2 Si ab uno puncto c (*fig.* 37.) ad re-

rectam ab duæ rectæ ducantur, altera ce oblique, altera vero perpendiculariter ac, erit hæc acuto angulo aec oppoſita. Si enim obtuſo ceb oppoſita cb poſſet eſſe perpendicularis, cum acutus angulus cea trianguli ceb externus æqualis eſſet duobus internis nempe ecb, & cbe, qui tum per hypot. rectus eſſet, jam acutus foret recto major, quod eſt impoſſibile (1) ergo &c.

(1) *per defin.* 12. 3 Si Trianguli unus Angulus rectus eſt vel obtuſus, reliqui ſunt acuti.

4 Si duo Triangula angulos duos habuerint vel ſinguli ſingulis, vel bini binis æquales, & tertius angulus tertio æqualis erit.

5 Summa Angulorum cujuſcunque Rectilineæ Figuræ conficit bis tot rectos, quot ſunt latera Figuræ, demptis rectis quatuor.

A quolibet enim intra figuram puncto a (*fig.* 38) rectæ ad ſingulos angulos ducantur, hæ figuram in tot divident triangula quot latera, atqui tres ſingulorum triangulorum anguli ſunt duobus rectis
(2) *per prop.* 5. æquales (2) ergo omnium triangulorum anguli omnes ſimul ſumpti bis tot rectos conficient, quot latera. At Verti-

ca-

cales Anguli triangulorum ad punctum a exiſtentes ſunt quatuor rectis æquales (1) (poteſt enim per punctum a duci recta, in quam ad oppoſitas plagas incidant rectæ in a convenientes) ergo omnes triangulorum anguli ad baſes ſimul ſumpti bis tot rectos conficiunt quot latera, demptis quatuor rectis angulorum ad Vertices. Sed anguli triangulorum ad baſes ſimul ſumpti ſunt angulis figuræ omnibus ſimul ſumptis æquales, ergo omnes Figuræ anguli ſimul ſumpti bis tot rectos conficiunt quot latera, demptis quatuor rectis.

(1) *per Sch. 1. ad defin. 12.*

Hinc ſi cujuſcunque Figuræ laterum numerus e. g. *6* (qui laterum numerus appellatur etiam Figuræ Denominator, cum ex eo denominentur Figuræ vel Pentagonæ, vel Hexagonæ &c.) ſi inquam denominator figuræ v. g. *6* bis ponatur, fiatque productum 12, a quo demas 4, quod eſt reliquum 8 numerus eſt rectorum angulorum, quibus ſumma angulorum ejus Figuræ æqualis eſt.

Denominator Figuræ.

6 Omnes ergo rectilineæ Figuræ, quæ ejuſdem ſint ſpeciei, eodem nempe laterum numero, æquales habent angulorum ſummas.

7 Omnes ergo ordinatæ ſeu regulares ejuſdem ſpeciei Figuræ, licet non ſint invicem æquilateræ, ſunt tamen æquiangulæ.

Propoſitio 6.

Lib. 1. prop. 34.

Parallelogrammum in duas æquales partes diametro dividitur.

(1) *per defin. 28.*

(2) *per Sch. 2. Axio. 12.*

Cum (*fig.* 18.) e h, g f ſint parallelæ (1) rectaque e f, quæ Diameter eſt, ſecentur; æquales erunt alterni anguli f e h, e f g: eadem ratione cum e g, h f ſint parallelæ, rectaque e f ſecentur, æquales item erunt alterni e f h, f e g. ergo Triangula q r duos angulos habent alterum alteri alterius Trianguli æquales, ſcilicet f e h & e f g : e f h & f e g: & latus e f cui æquales anguli adjacent commune; ergo Triangula q, r æqualia ſunt (2) inque duas æquales partes Parallelogrammum eſt Diametro diviſum. q. e. d.

Corollaria.

1 Parallelogrammi anguli oppoſiti æquales ſunt.

Cum enim ex ſuperius demonſtratis anguli f e h & f e g, itemque e f h, &

f e g

f e g æquales ſint, duo ſimul f e h, & f e g æquales erunt duobus e f g, e f h, nempe totus g e h toti g f h æqualis, tum vero cum Triangula q, r latus habeant e f commune, & adjacentes angulos æquales, æquales item erunt anguli e h f, & e g f (1) immo & (1) *per Sch.2. ad Axio. 12.*

2 Æqualia erunt latera e h & g f, e g & f h. adeoque Parallelogrammi non oppoſiti modo Anguli, ſed oppoſita quoque latera ſunt æqualia. (*fig.* 18.)

3 Omne Triangulum Parallelogrammi dimidia pars eſt. *Lib. 1. prop. 41.*

Nam ſi a vertice e Trianguli q ducas lateri oppoſito g f parallelam & æqualem e h, jungaſque h f; erit (2) Triangulum q: dimidia pars parallelogrammi g e h f. id vero fieri poteſt quocumque in Triangulo. ergo &c. (2) *per prop. 6.*

4 Cujuslibet Parallelogrammi, immo & Quadrilateri quatuor ſimul Anguli quatuor rectis Angulis æquales ſunt. (*fig.* 18. & 39.)

Duorum enim Triangulorum anguli ſimul omnes quatuor rectis æquales ſunt (3). Parallelogramma quælibet imo & Quadrilatera ſunt duo Triangula, (quod manifeſtum eſt, ſi ab angulorum (3) *per prop. 5.*

alte-

altero ad oppoſitum Diametrum ducas) ergo cujuslibet Parallelogrammi, imo & Quadrilateri quatuor ſimul anguli quatuor rectis æquales ſunt.

5 Hinc Parallelogramma X, Z quorum ſingula unum angulum habent uni alterius Parallelogrammi æqualem, ut ſit a æqualis c, ſunt æquiangula. (*fig.* 40.)

Nam ang. a eſt æqualis b, & c æqualis d (1) ſed per hypot. a æqualis c, ergo & b æqualis d, ſed quatuor ſimul anguli a b e f quatuor ſimul d c g h æquales ſunt (2), ergo ſi æquales utrinque demas a & b, d & c, qui ſuperſunt e & f æquales erunt g & h, atqui e æqualis f, & g æqualis h (1), ergo & e æqualis g, & f æqualis h, cum ſinguli æqualium totorum e & f, g & h, dimidia pars ſint: ergo Parallelogrammi X anguli a b e f ſinguli ſingulis c d g h Parallelogrammi Z æquales ſunt q. e. d.

(1) *per Cor. 2. antec.*

(2) *per Cor. 4. antec.*

Clarius in Numeris. Sit ang. a graduum 50, itemque 50 c, erit & b 50, & d 50 (1). Cum vero quatuor ſimul recti ſint graduum 360 [ut ſuo loco patebit] reliqui duo ſimul tam e & f quam g & h erunt graduum 260 (2) cumque e

ſit

ſit æqualis f, & g æqualis h, erunt ſinguli graduum 130. & propterea a 50, c 50, b 50, d 50 æquales invicem ſunt: itemque æquales invicem e 130, g 130, f 130, h 130. q. e. d.

Propoſitio 7.

Parallelogramma acfb, alqb. (*fig.* 41.) *ſuper baſi eadem* ab *vel æquali, & inter eaſdem parallelas* cq, ax *conſtituta ſunt æqualia*. *Lib. 1. prop. 35. 36.*

Rectæ al, bq ſunt parallelæ (1) quæ recta cq ſecantur, ergo angulus externus l æqualis eſt interno q (2); porro cf æqualis eſt ab, eidemque æqualis lq, (3) ergo & cf, lq æquales, quibus ſingulis ſi addas fl, erunt cl, fq æquales, atqui æquales quoque al, bq (3), triangulum igitur cla duo latera habet cl, la, duobus fq, bq trianguli fqb æqualia, angulique iis lateribus comprehenſi l, q æquales ſunt, adeoque æqualia triangula cla, fqb (4), quibus triangulis ſi commune demas fol, quæ ſuperſunt plana caof, lobq æqualia ſunt, quibus ſingulis ſi addas aob, parallelogramma acfb, alqb ſunt æqualia: q. e. d.

(1) *per defin. 28.*
(2) *per prop. 4.*
(3) *per Corol. 2. prop. 6.*
(4) *per Schol. 1. ad axio. 12.*

SCHOLIUM.

1 PArallelogrammum rectangulum quod & ſimpliciter rectangulum dicitur, efformari intelligitur, ſi alterutrum ex ſuis lateribus a c (*fig.* 42.) perpendiculariter totum excurrat contiguum latus a f : eo enim motu rectanguli area a c e f deſcribitur.

2 Hinc multiplicatis invicem contiguis rectanguli lateribus ejus area producitur : ut ſi contigua latera a c a f in æquales partes dividantur, ſitque a c trium v. g. palmorum & a f quatuor; 3 & 4 invicem multiplicati producunt 12 : area igitur rectanguli erit 12. Revera ducti,per laterum diviſiones parallelis aream in duodecim minora æqualia (1) rectangula partimur.

(1) *per Corol.* 1. *& 2. prop.* 6.

3 Ideo rectangulum contineri dicitur ſub contiguis lateribus a c, a f & rectang. a c, a f, vel brevius c a f rectangulum ſignificat ex eorum laterum multiplicatione.

4 Quod ſi rectangulum quadratum ſit, (*fig.* 43.) ejus area producitur ex alterutro ſuorum laterum, quæ invicem

cem æqualia ſunt (1) per ſeipſum multiplicato, ut ſi f i ſit 3, area quadrati f i erit 3 multiplic. per 3 nempe 9. Latus ex cujus multiplicatione fit quadratum, dicitur ejus Quadrati Radix. (1) *per defin.* 24. Radix Quadrati.

5 Si alterutrum ex rectanguli lateribus, (*fig.* 42.) quibus contineri dicitur, baſim facias a f alterum a c erit altitudo rectanguli. Nam cum a c ſi ad a f perpendiculare (2), parallelarum a f c e diſtantiam metitur (3). Quod ſi baſim feceris a c, eadem ratione a f erit altitudo. (2) *per defin.* 10. *&* 23. (3) *per defin.* 13.

6 Et cujuſcunque Parallelogrammi altitudo eſt Perpendicularis ad baſim ducta a latere Parallelogrammi baſi parallelo, quod, ſi opportuerit, producitur, ita (*fig.* 41.) Parallelogrammi a l q b altitudo eſt a c.

7 Cujuſcunque Parallelogrammi area producitur ex multiplicatis invicem baſi & altitudine.

Parallelogrammum enim e. g. a l q b æquale eſt rectangulo a c f b ſuper eadem baſi, & inter eaſdem parallelas conſtituto (4), ac quod perinde eſt ad eandem altitudinem a c (5). Hujus rectanguli area ex multiplicatis invicem (4) *per prop.* 7. (5) *per Schol.* 0. *ſup. & per defin.* 13.

(1) *per Schol. 2. ſup.* altitudine a c & baſi a b producitur (1), ergo & æqualis Parallelogrammi a b q l area ex eadem multiplicatione habetur.

8 Trianguli quoque latus quodlibet baſim ſtatuere poſſumus a b [*fig.* 44.], altitudo autem trianguli eſt perpendicularis ad baſim a vertice ſibi oppoſiti anguli ducta nempe c d : vel ſi per verticem c ducta ſit i f ad a b parallela, erit quoque altitudo trianguli perpendicularis a i ad baſim a b a parallela i f ducta. utraque enim a i & d c parallelarum a b i f, inter quas conſtitutum eſt triangulum, diſtantiam metitur.

9 Area trianguli producitur ex multiplicatis invicem baſi & dimidia altitudine, vel altitudine & dimidia baſi, ut ſi baſis a b ſit *6* altitudo c d 4, area trianguli erit *6* multiplic. per 2 nempe 12; vel 3 multiplic. per 4 nempe 12.

Triangulum enim Parallelogrammi (2) *per Corol. 3. prop. 6.* dimidia pars eſt [2]: area Parallelogrammi producitur ex multiplicata baſi (3) *per Corol. 7. ant.* *6* per altitudinem 4, vel e converſo [3], ex quo ſit 24, dimidia pars habebitur, vel ex multiplicata baſi per dimidiam altitudinem *6* per 2 nempe 12, vel ex multiplicata altitudine per dimidiam baſim 4 per 3 nempe 12.

10 Triangula ſuper baſi eadem vel æquali & inter eaſdem parallelas conſtituta ſunt æqualia. *Lib. 1. prop. 37. 38.*

11 Triangula æqualia, quæ eandem, vel æqualem habent baſim, modo eodem ſpectent Vertices, ſunt inter eaſdem Parallelas. *Lib. 1. prop. 15. 39. 40.*

Propoſitio 8.

Recta if [*fig.* 46.] *quæ diametri* cb *extremum punctum* b *pertingens eidem diametro perpendicularis eſt, circulum tangit in puncto* b, *& reliqua ejus rectæ puncta omnia extra circulum ſunt.* *Lib. 3. prop. 16.*

Neque inter ipſam rectam tangentem & circulum a puncto b *alia recta duci poteſt, quin circulum ſecet.*

Prima pars. A centro a ad rectæ if punctum quodlibet præter b e. g. punctum l duc rectam al: cum angulus abl ſit rectus per hypoth. erit bla acutus, [1] ergo latus al majus ab [2], ſed ab radius circuli in peripheriam definit, ergo eo majus al illam præterit. Quod de puncto l demonſtratum eſt de reliquis omnibus valet rectæ if punctis præter b; quæ propterea omnia extra peripheriam ſunt præter ipſum b; quod

(1) *per Corol. 3. prop. 5.*
(2) *per prop. 2.*

cum ſit commune punctum & rectæ i f, & diametri a b, & peripheriæ, in eo recta i f & diametrum tangit & peripheriam. q. e. d.

Secunda pars. Inter rectam i f & peripheriam a puncto b ducatur recta b r. Angulus a b r recto minor eſt acutus, ergo a b non eſt ad b r perpendicularis [1]. Si ergo ad rectam b r a centro a perpendicularem ducas, hæc rectæ b r quodlibet aliud punctum a puncto b pertinget: & ſi rectæ b r quoblibet aliud punctum a puncto b extra circulum eſſet, perpendicularis ducenda circulum præteriret. Eſto igitur hujuſmodi perpendicularis a o, quæ cum acuto angulo a b r ſit oppoſita, recta vero a b recto angulo a o b, eſſet a b major a o: [2] at a b a q æquales [3], ergo a q major a o nempe pars toto, quod eſt impoſſibile, eadem ratione impoſſibile oſtenditur perpendicularem a o & rectam a b æquales eſſe, ergo perpendicularis a centro a ad b r ducta minor erit a b, & intra circulum deſinet, adeoque b r circulum ſecabit. q. e. d.

(1) *per defin.* 10.
(2) *per prop.* 2.
(3) *per defin.* 28.

Pro-

Propoſitio 9.

Angulus ad Centrum b a c [*fig.* 24. 25. 26.] *angulo ad peripheriam* b f c *eidem ac ille arcui* b c *inſiſtente duplus eſt.* *Lib. 3. prop. 20.*

Primo. Si latus b a [*fig.* 24.] pars ſit lateris b f; trianguli n latera a c, a f æqualia ſunt [1], igitur & æquales anguli f, & c [2], atqui ang. b a c angulis f & c æqualis [3], ergo angulo f duplus.

(1) *per defin.* 38.
(2) *per Schol.* 3. *ad axio.* 12.
(3) *per prop.* 5.

Secundo. Si latera b a, a c [*fig.* 25.] ſint intra b f, f c; ducta diametro f x ang. b a x angulo b f x duplus eſt, itemque x a c duplus ang. x f c [4], ſed b a c angulis b a x, x a c æqualis, & b f c angulis b f x, x f c item æqualis, ergo b a c angulo b f c duplus.

(4) *per* 1. *partem hujus.*

Tertio. Si latus f c [*fig.* 26.] ſecet latus a b. Angulus x a b duplus eſt angulo x f b [4] & angulus x a c duplus angulo x f c [4], ergo ſi ab angulo x f b auferas ang. x f c, & hujus duplum x a c a prioris duplo x a b auferas, qui ſupereſt c e b duplus erit ſuperſtite c f b.

Propoſitio 10.

Lib. 3. prop. 28. 29. *In eodem vel in æqualibus circulis* b e f c b f x c [*fig.* 24. 25.] *ſi anguli ſive ad centra* b a c, *ſive ad peripherias* b f c *æquales ſint, æquales item ſunt arcus* b c *quibus inſiſtunt*.

Et ſi arcus b c *æquales ſunt, æquales item ſunt inſiſtentes anguli ſive ad centra, ſive ad peripherias*.

Prima pars. Cum anguli a ad centra æquales ſunt per hypoth., tum æqualia ſunt crura a b, a c [1], ergo in triangulis b a c æqualia item erunt latera b c (2) igitur & arcus b c, quorum ea latera ſunt chordæ. [3]

(1) per defin. 38.
(2) per Schol. 1. ad axio. 12.
(3) per Schol. 8. ibi.

Quod ſi res ſit de æqualibus angulis b f c ad peripherias, cum eorum dupli ſint anguli b a c ad centra [4], ſunt & iſti æquales, eodemque res redit quo ſupra.

(4) per prop. 9.

Secunda pars. Si arcus b c æquales ſunt, æquales item ſunt chordæ b c [2]: triangula igitur b a c æquilatera ſunt, cum latera quoque a b a c ſint æqualia, ergo & anguli ad centra b a c æquales [5], quorum cum anguli b f c ad peripherias ſint dimidii [3], erunt hi quoque æquales. *Pro-*

(5) per prop. 1.

Digitized by Google

Propoſitio 11.

1 *Angulus in Semicirculo Rectus eſt.* *Lib. 3. prop. 31.*
2 *In ſegmento quod Semicirculo ſit majus, Recto minor eſt.*
3 *In ſegmento quod Semicirculo ſit minus, Recto major eſt.*

Prima pars. (*fig.* 47.) Centro a ad verticem anguli c ducta recta a c cum æqualia ſint latera a b, a c æquales item erunt anguli o & b (1): eadem ratione æquales quoque erunt anguli i & f, ergo anguli o & i, hoc eſt angulus b c f angulis b & f æqualis, atqui tres anguli b c f & b & f duobus rectis ſunt æquales, (2) ergo angulus b c f, qui eorum trium angulorum eſt ſemiſſis, rectus eſt: angulus autem b c f eſt in ſemicirculo (3) ergo &c.

(1) *per Schol. 3. ad axio. 12.*
(2) *per prop. 5.*
(3) *per defin. 43.*

Secunda pars. (*fig.* 48.) Ducta diametro b l, & recta b o. Segmentum f b x o l ſemicirculo b x o l majus eſt. Angulus f o l in ſegmento f b x o l minor eſt angulo b o l, qui eſt in ſemicirculo, quique rectus eſt (4), ergo angulus in ſegmento, quod ſemicirculo ſit majus, eſt recto minor.

(4) *per prim. partem.*

Ter-

Tertia pars. Segmentum x o l minus eſt ſemicirculo b x o l. Angulus in ſegmento x o l major recto b o l, qui eſt in ſemicirculo, ergo angulus in ſegmento, quod ſemicirculo minus ſit, eſt recto major. Quod enim de hiſce angulis demonſtratum eſt, idem omnino & de omnibus valet.

Digitized by Google

GEOMETRICARUM
INSTITUTIONUM
PARS ALTERA
De Proportionibus.

CUm Geometria in dimetiendis magnitudinibus maximam partem verſetur, eſt ideo multa in iis invicem comparandis, decernendoque quam rationem habeant inter ſe, an ſcilicet æquales ſint, an altera major, altera minor.

Definitiones.

1 REſpectus ergo iſte, iſta *relatio unius magnitudinis ad alteram, quantum ad æqualitatem, vel inæqualitatem* dicitur earum magnitudinum ratio, ſeu proportio. Ratio, ſeu Proportio.

2 Sunt ergo in omni ratione ſeu proportione duo termini, quorum *quilibet ponitur primo;* dicitur *antecedens*, alter *qui ſecundo ponitur*, *conſequens* dicitur. Ratio ſeu proportio antecedentis ad Antecedens; & Conſequens.

con-

conſequentem denotari ſolet a Geometris hoc ſigno

Signum Rationis.

: Signum rationis, ſeu proportionis unius termini ad alterum: ſic 20 : 10 rationem ſignificat numeri 20 ad 10.

Ratio Æqualitatis, Inæqualitatis.

3 *Cum* vero *antecedens*, *&* *conſequens æquales ſunt*, ratio ſeu proportio *æqualitatis* dicitur; *cum* vero *inæquales*, ratio ſeu proportio *inæqualitatis*.

Ratio majoris inæqualitatis. Minoris inæqualitatis.

4 Quod *ſi antecedens eſt conſequente major*, ut 20 : 10, tum ratio dicitur *majoris inæqualitatis*: *ſi antecedens eſt conſequente major*, ut 10 : 20, ratio dicitur *minoris inæqualitatis*.

5 At vero non id ſolum curant Geometræ, ut decernant, an duæ magnitudines rationem habeant inter ſe æqualitatis, vel inæqualitatis; ſed quærunt porro, quoties antecedens conſequentem contineat, vel ſi conſequente ſit minor, quoties iſto contineatur: e. g. ſint duo numeri 12 & 4, non id ſolum quærunt, an 12 & 4 inæquales ſint, verum etiam quoties 12 contineat 4: id ut noſcant majorem terminum minore metiuntur, & quoties minor terminus ſit reponendus, ut æquet majorem, id notant numero aliquo, quo tan-

ed by Google

tandem numero definiunt, quoties major terminus minorem contineat, quantaque veluti ſit illorum terminorum ratio, ſeu proportio: iſque adeo numerus rationis exponens, vel denominator dicitur: ut in datis numeris 12 & 4 minore numero 4 majorem 12 metiuntur, & cum 4, ut æquet 12, ſit ter reponendus, id notant numero 3, quo numero definitur, quanta veluti ſit ratio, ſeu proportio 12 ad 4, nempe triplam eſſe: rationis ergo 12 ad 4 numerus exponens, vel denominator eſt 3.

Rationis exponens, vel Denominator.

Quem rationis exponentem numerum facillime invenies, ſi Antecedentem per conſequentem partiaris: Quotus enim, ideſt numerus deſignans, in quas partes diviſor dividendum partiatur, eſt numerus ipſe, qui quæritur: idem enim numerus deſignat, quoties diviſor ſit reponendus, ut dividendum adæquet: ita in datis numeris 12 partiti per 4 quotus eſt 3, idemque rationis exponens, nam 4 multipl. per 3 eſt 12.

Quotus.

Alio etiam modo, eoque ſæpius rationes exponi ſolent a Geometris: ponitur nempe ſuperiore loco antecedens, conſequens inferiore lineola interpoſi-

ta:

ta: ut in allato exemplo 12 : 4 ita exponitur $\frac{12}{4}$, quo ſigno duodecim quartæ unitatis partes denotantur. Idem autem omnino denotatur tam ſigno, ſeu fractione $\frac{12}{4}$, quam numero 3, quem rationis 12 : 4 exponentem numerum eſſe ſuperius docuimus: numero enim 3 tres unitates ſignificantur, tres vero unitates ſunt unitatis duodecim quartæ partes:

6 Rationum autem expoſitionem id conſequitur commodi, ut rationes ipſæ queant invicem comparari, facileque decerni, an æquales, ſeu mavis ſimiles ſint, an vero inæquales, ſeu diſſimiles: Ratio enim Geometrica Geometricæ rationi æqualis eſt, ſeu ſimilis, cujus antecedens toties ſuum conſequentem continet, quoties alterius antecedens ſuum; quæ rationes hujuſmodi non ſunt, inæquales ſunt, ſeu diſſimiles: quod quidem facile dignoſcitur exponentes numeros, ſeu denominatores inter ſe comparando: ita 8 : 4 & 12 : *6* æquales ſunt, quod tam prima ratio, quam ſecunda numero 2 exponitur: at

Rationes æquales. Inæquales.

8 :

8 : 4 & 12 : 3 inæquales ſunt, quod prima numero 2 altera 4 exponitur.

7 Ex inæqualibus rationibus, ſi majoris inæqualitatis ſint, illa dicitur major, *cujus antecedens conſequentem excedat magis*, adeoque *cujus denominator numerus major ſit præ alterius denominatorem*: ut 12 : 4, cujus denominator eſt 3, major eſt 10 : 5, cujus denominator eſt 2.

Rationum majoris inæqualitatis quæ major, quæ minor.

8 At ex rationibus minoris inæqualitatis illa major eſt, *cujus antecedentem minus excedit conſequens*, adeoque *cujus denominator numerus minor eſt alterius denominatore*: tum enim antecedens ad ſe conſequenti æquandum magis accedit: ita 5 : 10, cujus denominator eſt 2, major eſt ratione 4 : 12, cujus denominator eſt 3.

Minoris inæqualitatis quæ major, quæ minor.

9 Cum rationes æquales ſunt, ut 8 : 4 & 12 : 6, earum termini dicuntur diſcretim proportionales, vel etiam tantum proportionales, atque hoc ſigno denotari ſolent

Diſcretim proportionales, vel proportionales.

:: Signum rationum æqualium : ſic 8 : 4 :: 12 : 6 denotat ita 8 eſſe ad 4, ut 12 ad 6.

10 Continue vero proportionales dicun-

Continue proportionales.

cuntur tres, vel plures termini, cum ita primus eſt ad ſecundum, ut ſecundus ad tertium, & tertius ad quartum &c. proindeque medii termini bis ponuntur, ut 40 : 20 : 10 : 5, nam 40 : 20 :: 10 : 10 :: 10 : 5: qui termini bis ponuntur, medii proportionales dicuntur, ut 20 medius proportionalis eſt inter 40, & 10, hic autem medius proportionalis inter 20, & 5, at 20, & 10 duo medii proportionales inter 40, & 5. Continue proportionalium hoc eſt ſignum ∺ Signum proportionis continuæ: ſic 40, 20, 10, 5 ∺ denotat 40 eſſe ad 20, ut 20 ad 10, ut 10 ad 5.

Medii proportionales.

11 Rationum termini homologi, ſeu ſimiles ſunt antecedentes invicem, & invicem conſequentes: ſic in rationibus 8 : 4, & 12 : 6, 8 & 12 termini homologi ſunt, itemque homologi 4 & 6.

Termini homologi.

12 Minor terminus ſi aliquoties poſitus majorem adæquat, ut 4, qui ter poſitus adæquat 12, dicitur pars aliquota majoris termini; ſi nec aliquoties poſitus majorem adæquat, ſed ſemper aliquid ſit reliqui, ut 5, qui bis poſitus non adæquat 12, deficit enim binis unitatibus, dicitur pars aliquanta:

Pars aliquota, aliquanta.

&

& generaliter pars aliquota magnitudinis eſt, *quæ aliquoties poſita totam magnitudinem adæquat*, *quæ* contra *non adæquat*, eſt aliquanta.

13 Partes vero, ſive aliquotæ ſint, ſive aliquantæ, tum ſimiles dicuntur, *cum quoties una ſuo toto continetur, toties altera ſuo*, ſeu quod perinde eſt, cum qualis pars eſt ſui totius una, talis eſt altera ſui: ita 2 ad 4 & 10 ad 20 ſunt partes ſimiles, item 3 ad 8, & 6 ad 16: nam 2 bis continetur in 4, bis item in 20 continetur 10, ſeu, quod perinde eſt, 2 eſt ſemiſſis 4, & 10 ſemiſſis 20: itemque 8 continet 3 bis & duas tertias, & 16 pariter continet 6 bis & duas tertias: ſeu, quod perinde eſt, 3 eſt numeri 8 tres octavæ, & 6 tres pariter octavæ eſt numeri 16. Partes ſimiles.

14 Similes Figuræ ſunt, quæ cum ejuſdem ſpeciei ſint, ſingulos angulos ſingulis alterius æquales habent, ut in triangulis X, Z (*fig.* 28. *p.* 1.) anguli c & f, a & l, b & i æquales ſunt, & præterea latera habent proportionalia, vel quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos ſunt, ut ab : fi :: bc : il, & bc : il :: ac : fl, Similes Figuræ.

& a c : f l : : a b : f i, vel quæ circa æquales angulos ſunt, ut a b : b c : : f i : i l, & b c : c a : : i l : l f, & c a : a b : : f l : f i.

Quantitates reciproce proportionales.

15 Quatuor-quantitates reciproce proportionales, vel ſimpliciter reciprocæ dicuntur, cum prima eſt ad tertiam, ut quarta ad ſecundam. Numeri ergo 8, 4, 12, 6 ita ordinati diſcretim proportionales ſunt, ſin ita ordinentur, 8, 6, 4, 12, ſunt reciproce proportionales, nam 8 : 4 : : 12 : 6.

Figuræ reciprocæ.

16 Figuræ vero dicuntur reciprocæ, cum latera quidem habent proportionalia, ſed ita ut cum in prima figura ſit primæ rationis antecedens, conſequens ſit in altera figura, (*fig.* 2.) in qua antecedens ſit ſecundæ rationis, cujus conſequens in prima ſit figura: ita Parallelogramma X, Z ſunt reciproca cum =

A c : c b : : f c : c l.

Ex hiſce definitionibus quædam ſponte fluunt ita manifeſta, ut jure pro Axiomatibus haberi poſſint, ſunto igitur =

Axio-

Axiomata.

1 PArtes ſimiles ad ſua tota eandem rationem habent ſic =
2 : 4 : : 10 : 20.

2 Partes ſimiles eandem inter ſe rationem habent, quam tota inter ſe: ſic quia totum 20 quinquies continet totum 4; dimidia pars 20, nempe 10, dimidiam partem 4, nempe 2, quinquies item continet: & quarta pars 20, nempe 5, quartam partem 4, nempe 1, quinquies continet, atque ita de reliquis. *Lib. 5. prop. 16.*

3 Si partes ſimiles a ſuis totis demantur, partes item ſimiles ſuperſunt: ſic ſi a toto 20 dimidiam partem 10 demas, dimidia pars ſupereſt nempe 10: & ſi a toto 4 dimidiam partem 2 demas, dimidia item pars ſupereſt nempe 2: & ſi a toto 20 quartam partem 5 demas, tres quartæ ſuperſunt nempe 15: & ſi a toto 4 quartam partem 1 demas, tres item quartæ ſuperſunt nempe 3. *Lib. 5. prop. 19.*

4 Summa duarum partium ſimilium eam habet ad ſummam ſuorum totorum rationem, quam ſingula tota habent ad partes ſingulas: ſic quia 10 eſt

dimidia pars totius 20, & 2 dimidia pars totius 4, ſumma partium 10 & 2, nempe 12, pars dimidia erit ſummæ totorum nempe 24, & quia 5 eſt quarta pars 20, & 1 quarta 4, 5 cum 1, nempe 6, quarta pars erit 20 cum 4, nempe 24.

Lib. 5. Prop. 8. 5 Duarum quantitatum 12 & 8 major 12 ad tertiam 6, vel 24 majorem habebit rationem, quam minor quantitas 8 ad eandem 6 vel 24 ſit habitura: major enim quantitas 12 pluries tertiam 6 continebit, quam eandem 6 contineat 8, vel in tertia 24 pluries 8, quam 12 continebitur.

6 Si antecedentes duo 12 & 18 ſint duobus conſequentibus 6 & 9 proportionales, proportionales item erunt ſimilibus conſequentium partibus 2 & 3. Si enim 12 bis continet 6, tertiam partem 6, nempe 2, ter bis, nempe ſexies, continebit, cumque 18 bis contineat 9, ſexies item tertiam partem 9, nempe 3, continebit.

Et ſi antecedentes 12 & 18 conſequentium 6 & 9 partibus ſimilibus 2 & 3 proportionales ſunt, proportionales item erunt conſequentibus: ſi enim 12 ſexies continet 2, bis continebit

bit ter 2, nempe 6, & ſi 18 ſexies continet 3, bis item continebit ter 3, nempe 9.

7 Si tres quantitates 6, 9, 12 ad tres alias 2, 3, 4 ſingulæ ad ſingulas eandem rationem habeant, ſitque 6 : 2 : : 9 : 3 : : 12 : 4; in eadem quoque ratione erit ſumma trium priorum, nempe 27, ad poſteriorum ſummam, nempe 9: eritque 27 : 9 : : 6 : 2, vel 9 : 3, vel 12 : 4.

QUæ voces ſeu termini ſint Geometris uſitatiores, eos primæ partis, & ſecundæ hujus initio fuſius explicavimus: verum non terminos ſolum ſibi proprios, uti pleræque omnes diſciplinæ, ſed propria quoque ſigna brevitatis ergo uſurpant Geometræ, quibus, quod pluribus litteris, quandoque verbis ſignificari ſolet, id illi una vel altera denotant lineola. Et proportionum quidem ſigna ſuperius ſuo loco adnotata ſunt, ſed cum adhuc ſint alia pleraque, ne moram afferant progredientibus, ſimul omnia prænotare juvat, & explicare.

Digitized by Google

Signa Geometrica.

= Signum æqualitatis: ſic $a = b$ ſignificat magnitudinem a magnitudini b æqualem eſſe.

+ Signum additionis: ſic $a + b$ ſignificat magnitudinem a cum magnitudine b, ſive ſummam earum magnitudinum: ſic $8 + 4$ ſignificat eorum numerorum ſummam, nempe 12.

— Signum ſubductionis: ſic $a - b$ ſignificat magnitudinem a, cui dempta ſit magnitudo b, quod perinde eſt ac ſi dicas, reliquum magnitudinis a, ſi ab ea quis tantum demat, quanta eſt magnitudo b: ſive etiam brevius exceſſus magnitudinis a præ magnitudine b, ſic $8 - 6$ exceſſum denotat prioris numeri præ altero, nempe denotat 2.

o Signum nihili: ſic $a - b = o$ denotat exceſſum magnitudinis a præ magnitudine b nihilo æqualem eſſe, proindeque binas magnitudines æquales eſſe.

× Signum multiplicationis: ſic $a \times b$ denotat productum ex iis quantitatibus invicem multiplicatis: ſic 10×2 denotat 20, productum nempe denarii numeri per binarium multiplicati.

$\frac{a}{b}$ Si-

$\frac{a}{b}$ Signum diviſionis, nempe magnitudinem a diviſam eſſe per magnitudinem b: quantitas dividenda ſuperiore loco ponitur, dividens inferiore lineola interpoſita: ita in numeris $\frac{8}{4}$ denotat numerum 8 diviſum per 4.

q Signum quadrati: ſic ab_q denotat quadratum lateris cb.

c Signum cubi: ſic ab_c eſt cubus lateris ab.

Fit autem cubus multiplicato quadrato per radicem ſuam (1), ſic cum quadrati 16 radix quadratica ſit 4, jam $16 \times 4 = 64$ erit cubus numeri 4, qui adeo numeris 4 cum quadrati 16 eſt radix quadratica, tum cubi 64 eſt radix cubica. — Cubus quid. — (1) *V. Sch. 4. prop. 7. part. prima.*

$\sqrt{}$ Signum radicis quadraticæ: ſic $\sqrt{a_q}$ denotat radicem quadrati a, ipſius nempe latus quodlibet (2). — (2) *defin. 24. & Schol. 4. prop. 7.*

$\sqrt{c}$ Signum radicis cubicæ: ſic $\sqrt{c}\,8$ denotat numeri 8 radicem cubicam.

: Signum rationis, ſeu proportionis unius termini ad alterum: ſic 20 : 10 rationem ſignificat numeri 20 ad 10.

:: Signum rationum æqualium: ſic 8 : 4 :: 12 : 6, denotat ita 8 eſſe ad 4, ut 12 ad 6.

∸ Signum proportionis continuæ: ſic 40 : 20 : 10 : 5 ∸ denotat 40 eſſe ad 20, ut 20 ad 10, & 20 ad 10, ut 10 ad 5.

DE PROPORTIONIBUS

Proprii argumentandi modi.

PRoprios quoque de Proportionibus argumentandi modos invenere Geometræ, quin Geometris potius natura ipſa ſponte ſuppeditavit, certiſſimos eos quidem, nec minus neceſſarios, quorum talis eſt =

Primus Modus

Invertendo.

1 Si 18 : *6* : : 12 : 4 erit etiam *6* : 18 : : 4 : 12 qui modus dicitur *invertendo*, *cum* ſcilicet *qui erat conſequens*, *fit antecedens*, *qui vero antecedens*, *fit conſequens*.

Demonſtr. Si 18 : *6* : : 12 : 4 quoties 18 continet *6*, toties 12 continet 4 nempe ter (1), ergo quoties *6* continetur in 18, toties 4 in 12, ergo invertendo *6* : 18 : : 4 : 12.

(1) *per defin. 6. part. 2.*

2 Quod ſi rationes inæquales fuerint, ut

ut 12 : 4 major, quam 20 : 10, erit invertendo 4 : 12 minor, quam 10 : 20. *Lib. 5. prop. 26.*

Id manifeſtum eſt tum ex præcedenti, tum ex definitionibus partis hujus ſecundæ 7 : 8 :

Secundus Modus

Permutando.

1 Si 36 : 12 : : 9 : 3, erit etiam 36 : 9 : : 12 : 3 qui modus dicitur *permutando* ſeu *alternando*, *cum* ſcilicet *primus terminus tertio*, ſeu, quod idem eſt, antecedens primus antecedenti ſecundo *confertur*, *& ſecundus terminus quarto*, ſeu, quod idem eſt, conſequens primus conſequenti ſecundo.

Demonſtr. Si 36 : 12 : : 9 : 3, 12 & 3 ſunt ſuorum totorum partes ſimiles (1), ſed partes ſimiles eam inter ſe rationem habent, quam tota inter ſe (2), erit ergo permutando ſeu alternando 36 : 9 : : 12 : 3.

(1) *per defin. 13. part. 2.*

(2) *per Axio. 2. part. 2.*

2 Quod ſi rationes inæquales fuerint 12 : 4 major quam 20 : 10 erit permutando 12 : 20 major quam 4 : 10. *Lib. 5. prop. 27.*

Demonſtr. Sit 12 ad aliam quantitatem 6 ut 20 : 10, erit permutando

12.

(1) *per antec.* $12 : 20 :: 6 : 10$ (1), atqui 6 eſt major quam 4, nam per hypoth. 12 continet 4 pluries, quam 6, ergo & ratio $6 : 10$ major quam $4 : 10$ per definitionem 11, pluries enim 4, quam 6 continebitur in 10, atqui $6 : 10 :: 12 : 20$, ergo $12 : 20$ major quam $4 : 10$.

Tertius Modus

Dividendo.

Lib. 5. prop. 17.

1 Si $36 : 12 :: 9 : 3$, erit etiam $=$ $36 - 12 : 12 :: 9 - 3 : 3$, qui modus *dividendo* dicitur, *cum* ſcilicet *exceſſus ſingulorum antecedentium præ conſequentibus ſuis ad eoſdem conſequentes referuntur.*

(2) *per defin. 13. part. 2.*
(3) *per Axio. 3. part. 2.*
(4) *per Axio. 2. part. 2.*
(5) *per 2. mod.*
(6) *per Axio. 1. part. 1.*

Demonſtr. 12 & 3 ſunt ſuorum totorum 36 & 9 partes ſimiles (2), ergo a ſuis totis ſi demantur 12 a 36, & 3 a 9 ſuperſunt (3) partes ſimiles 24 & 16, ergo (4) $=$

$36 : 9 :: 24 : 6$, ſed etiam (5)
$36 : 9 :: 12 : 3$, ergo [6]
$24 : 6 :: 12 : 3$, & permutando
$24 : 12 :: 6 : 3$.
ſed $24 = 36 - 12$, & $6 = 9 - 3$, ergo
$36 - 12 : 12 :: 9 - 3 : 3$. q. e. d.

2 Quod

2 Quod ſi rationes inæquales fuerint $12:4$ major quam $20:10$ erit *dividendo* $12-4:4$ major quam $20-10:10$. *Lib. 5. prop. 19.*

Demonſtr. Sit alia quantitas ex. gr.

$8:4::20:10$, erit dividendo

$8-4:4::20-10:10$.

atqui 8 minor 12 [1] ergo $12-4:4$ major quam $8-4:4$ [2], atqui ex demonſtratis $8-4:4::20-10:10$, ergo $12-4:4$ major quam $20-10:10$.

(1) per hypot. & axio. 5. p. 2.
(2) per axio. 5. part. 2.

Quartus Modus

Componendo.

1 Si $36:12::9:3$ erit etiam = $36+12:12::9+3:3$. Qui modus *componendo* dicitur, *cum* ſcilicet *ſingulorum antecedentium, ſuorumque conſequentium ſummæ ad eoſdem conſequentes referuntur.* *Lib. 5. prop. 18.*

Demonſt. Si $36:12::9:3$ erit permutando $36:9::12:3$ ſunt ergo 9 & 3 partes ſimiles totorum 36 & 12 ergo [3] $36+12:9+3::12:3$ & permut.do $36+12:12::9+3:3$. q. e. d.

(3) per Axio. 4. part. 2.

2 Quod ſi rationes inæquales fuerint $12:4$ major quam $20:10$ erit compo- *Lib. 5. prop. 21.*

po-

ponendo 12 + 4 : 4 major quam 20 + 10 : 10.

Demonſtr. eadem eſt, quæ ſuperior ſecundæ partis Modi tertii, modo ubi illic dividendo fit, fiat hic componendo.

Quintus Modus

Convertendo.

1 Si 36 : 12 : : 9 : 3 erit
36 : 36 − 12 : : 9 : 9 − 3 vel
2 Si 36 : 12 : : 9 : 3 erit
36 : 36 + 12 : : 9 : 9 + 3. Qui

Converſio rationis. Modi dicuntur *Converſiones rationum* vel *Convertendo*, *cum* ſcilicet vel *ſinguli antecedentes ad exceſſus ſuos præ ſuis conſequentibus*, vel *ſinguli antecedentes ad ſummas ipſius antecedentis cum ſuo conſequente referuntur*.

Prima pars Demonſtr. Si
36 : 12 : : 9 : 3 erit dividendo
36 − 12 : 12 : : 9 − 3 : 3, & invertendo
12 : 36 − 12 : : 3 : 9 − 3, & componendo
12 + 36 − 12 = 36 : 36 − 12 : : 3 + 9 − 3 = 9 : 9 − 3.

Secunda pars Demonſtr.
Si 36 : 12 : : 9 : 3 erit invertendo
12 : 36 : : 3 : 9, & componendo
12 + 36 : 36 : : 3 + 9 : 9 & invertendo rurſ.
36 : 36 + 12 : : 9 : 9 + 3.

3 Quod

Digitized by Google

3 Quod ſi rationes inæquales fuerint Lib. 5. prop. 30.
12 : 4 major quam 20 : 10, erit convert.
12 : 12 − 4 minor quam 20 : 20 − 10 vel
4 Si 12 : 4 major quam 20 : 10, erit convertendo 12 : 12 + 4 major quam 20 : 20 + 10.

Tertia pars Demonſt.

Si 12 : 4 major quã 20 : 10, erit divid. [1] (1) per 2. modi 3.
12 − 4 : 4 major quam 20 − 10 : 10,
& invertendo [2] (2) per 2. modi 1.
4 : 12 − 4 minor quam 10 : 20 − 10,
& componendo [3] (3) per 2. modi 4.
4 + 12 − 4 = 12 : 12 − 4 minor quam
10 + 20 − 10 = 20 : 20 − 10.

Quarta pars Demonſtr.

Si 12 : 4 major quam 20 : 10, erit invertendo (2)
4 : 12 minor quam 10 : 20 & componendo (3)
4 + 12 : 12 minor quam 10 + 20 : 20
& invertendo rurſum
12 : 12 + 4 major quam 20 : 20 + 10.

Sextus Modus

Miſcendo.

1 Si 36 : 12 : : 9 : 3 erit
36 + 12 : 36 − 12 : : 9 + 3 : 9 − 3.

Qui

Qui modus dicitur *Miſcendo*, *cum* ſcilicet *ſumma antecedentis & conſequentis ad antecedentis exceſſum præ conſequente refertur*.

Demonſtratio.

Si $36 : 12 :: 9 : 3$ erit componendo
$36 + 12 : 12 :: 9 + 3 : 3$ & alternando
$36 + 12 : 9 + 3 :: 12 : 3$.

Rurſum.

Si $36 : 12 :: 9 : 3$ erit dividendo
$36 - 12 : 12 :: 9 - 3 : 3$ & alternando
$36 - 12 : 9 - 3 :: 12 : 3$, atqui ex demonſtratis
(1) *per axio. 1. part. 1.* $36 + 12 : 9 + 3 :: 12 : 3$, ergo (1)
$36 + 12 : 9 + 3 :: 36 - 12 : 9 - 3$ & alternando
$36 + 12 : 36 - 12 :: 9 + 3 : 9 - 3$ q.e.d.

2 Quod ſi rationes inæquales fuerint $12 : 4$ major quam $20 : 10$ erit miſcendo $12 + 4 : 12 - 4$ minor quam $20 + 10 : 20 - 10$.

Demonſtratio.

Si $12 : 4$ major quam $20 : 10$ erit con-
(2) *per 3. & 4. part. modi 5.* vertendo (2)

Primo.

$12 : 12 - 4$ minor quam $20 : 20 - 10$, &
(3) *per 2. p. modi 2.* alternando (3)
$12 : 20$ minor quam $12 - 4 : 20 - 10$.

Se-

Digitized by Google

Secundo.

$12 : 12 + 4$ major quam $20 : 20 + 10$, & alternando (1) (1) *per 2. p. modi 2.*

$12 : 20$ major quam $12 + 4 : 20 + 10$ erit ergo $12 - 4 : 20 - 10$, quæ major quam $12 : 20.$, major quoque, quam $12 + 4 : 20 + 10$, quæ minor eſt quam $12 : 20$: erit itaque $12 - 4 : 20 - 10$ major quam $12 + 4 : 20 + 10$, & alternando (1) $12 - 4 : 12 + 4$ major quam $20 - 10 : 20 + 10$, & invertendo (2) (2) *per 2. p. modi 1.*

$12 + 4 : 12 - 4$ minor quam $20 + 10 : 20 - 10$ q. e. d.

Hi fere Modi ſunt de duabus rationibus, qui ſequuntur de quatuor ſunt vel etiam pluribus.

Septimus Modus

Ex Æquo.

Si duæ habeantur æquales rationes $30 : 10 :: 12 : 4$, & præterea conſequens primæ rationis 10 ſit ad aliam quantitatem v. g. 5, ut conſequens ſecundæ rationis 4 ad aliam quantitatem nempe 2, ita ut quatuor extent rationes, binæ inter ſe æquales, nimirum $30 : 10 :: 12 : 4$, & $10 : 5 :: 4 : 2$ erit antecedens primæ rationis ad ſui conſequentis conſequentem *Lib. 5. prop. 22.*

tem

tem in tertia ratione nempe 30 : 5, ut antecedens ſecundæ rationis ad ſui conſequentis conſequentem in quarta ratione nempe ut 12 : 2, itaque brevius. Sit 30 : 10 :: 12 : 4, & 10 : 5 :: 4 : 2, erit 30 : 5 :: 12 : 2. Qui Modus dicitur Ex Æquo.

Demonſtr. ſit =

30 : 10 :: 12 : 4	& 10 : 5 :: 4 : 2
hæc alternando erit	hæc alternando erit
30 : 12 :: 10 : 4	10 : 4 :: 5 : 2,

(1) *per axio. 2. part. 1.* ergo (1) erit 30 : 12 :: 5 : 2,
& alternando 30 : 5 :: 12 : 2. q. e. d.

Scholium.

Ratio compoſita.

1 Quæ ratio 30 : 5 dicitur componi ex rationibus 30 : 10 & 10 : 5. Ratio enim ex iis rationibus compoſita dicitur, quarum exponentes numeri invicem multiplicati ejus, quæ compoſita dicitur, exponentem numerum producunt. Hic cum 30 contineat 10 ter, 10 vero contineat 5 bis, ter 10 nempe 30 continebit 5 ter bis nempe ſexies, qui numerus producitur ex numero exponente rationem 30 : 10 nempe 3 multiplicato per exponentem rationis 10 : 5 nempe 2 : nam $3 \times 2 = 6$, adeo-

adeoque ratio 30 : 5, componitur ex rationibus 30 : 10 & 10 : 5. Eadem de cauſa ratio 12 : 2 ex rationibus componitur 12 : 4 & 4 : 2.

2 At ſi qua ratio ex æqualibus rationibus ſit compoſita, tum potius quam compoſita, ratio duplicata dicitur alterutrius earum rationum, quarum ſingulæ ejus rationis, quæ duplicata eſt, ſubduplicatæ dicuntur. Id autem contingit in continue proportionalibus, in quibus ratio primi termini ad tertium eſt ratio duplicata rationis primi termini ad ſecundum, quæ ratio primi termini ad ſecundum eſt ſubduplicata rationis primi termini ad tertium. Sunto continue proportionales 8 : 4 : 2 ratio 8 ad 2, quæ componitur ex ratione 8 : 4, & 4 : 2, cum iſtæ æquales ſint, dicitur rationis 8 : 4 duplicata, ratio vero 8 : 4 rationis 8 : 2, ſubduplicata. Ratio duplicata & ſubduplicata.

3 Quod ſi continue proportionales ſint quatuor ut 16 : 8 : 4 : 2, ratio primi termini ad tertium, nempe 16 : 4 duplicata eſt rationis primi termini ad ſecundum, nempe 16 : 8. Verum ratio primi termini ad quartum, nempe 16 : 2 triplicata dicitur rationis primi Ratio triplicata.

E ter-

termini ad ſecundum, nempe 16 : 8. Triplicatæ rationis exponens numerus producitur ex multiplicatis invicem exponentibus numeris duplicatæ rationis & ſubduplicatæ. Ita triplicatæ rationis 16 : 2 exponens numerus 8 producitur ex numero duplicatam rationem 16 : 4 exponente, nempe 4 multiplicato per exponentem numerum rationis ſubduplicatæ 16 : 8, nempe 2, nam $4 \times 2 = 8$.

Ratio ſubtriplicata.

Quæ autem ratio ad duplicatam ſubduplicata dicitur, ut ratio 16 : 8 ad rationem 16 : 4, eadem 16 : 8 ad triplicatam 16 : 2 ſi refertur, ſubtriplicata appellatur.

Corollarium.

Lib. 5. prop. 24.

Si duæ quantitates 4 & 2 habeant ſingulæ ad tertiam 8 eandem rationem, quam duæ aliæ quantitates 6 & 3 habent ſingulæ ad tertiam 12, ut ſit 4 : 8 : : 6 : 12 & 2 : 8 : : 3 : 12 binæ quantitates ſimul ſumptæ eandem habent ad ſuas tertias rationem, eritque

4 + 2 : 8 : : 6 + 3 : 12

Nam ſi 2 : 8 : : 3 : 12, eſt invertendo

8 : 2 : : 12 : 3, eſt ergo

4 : 8 : : 6 : 12 & 8 : 2 : : 12 : 3 & ex æquo

4 : 2 : : 6 : 3 & componendo

4 + 2 : 2 : : 6 + 3 : 3, ſed per hypoth.

& 2 : 8 : : 3 : 12, ergo ex æquo

4 + 2 : 8 : : 6 + 3 : 12. q. e. d.

O-

Octavus Modus.

Ex Æquo perturbate.

1 Si 30 : 10 :: 12 : 4, & conſequens primæ rationis 10 ſit ad alium numerum 5, ut alius numerus 24 ad antecedentem ſecundæ rationis 12; erit antecedens primæ rationis nempe 30 ad ſui conſequentis conſequentem nempe 5, ut antecedens quartæ rationis 24 ad conſequentem ſecundæ 4, itaque brevius.

Si 30 : 10 :: 12 : 4, & 10 : 5 :: 24 : 12 erit 30 : 5 :: 24 : 4. Qui modus dicitur ex æquo perturbate. *Lib. 5. prop. 23.*

Demonſtr. Ratio 30 : 5 componitur ex rationibus 30 : 10, & 10 : 5. Ratio autem 24 : 4 componitur ex rationibus 24 : 12, & 12 : 4 (1). Atqui binæ componentes rationes 30 : 10, & 10 : 5 binis componentibus 24 : 12, & 12 : 4 æquales ſunt: nam ex una parte denominator rationis 30 : 10 eſt 3, & 10 : 5 eſt 2; ex altera item parte denominator rationis 24 : 12 eſt 2, & 12 : 4 eſt 3 (2), ergo & compoſitæ 30 : 5, & 24 : 4, quarũ denominatores ex eorundem numerorum 2 & 3 multiplicatione producuntur,

(1) *per Schol. 1. praced.*

(2) *per defin. 5. part. 2.*

tur, æquales erunt, erit enim utrinque denominator *6*.

Lib. 5. prop. 31. 2 Quod ſi rationes inæquales fuerint ita 12 : 4 major quam 20 : 10,
& 4 : 2 major quam 10 : 8,
erit ex æquo 12 : 2 major quam 20 : 8.

Lib. 5. prop. 32. 3 Et ſi rationes inæquales fuerint ita 12 : 4 major quam 20 : 10,
& 4 : 2 major quam 30 : 20 erit ex æquo perturbate 12 : 2 major quam 30 : 10.

Demonſtratio eadem eſt quæ ſuperior, modo ubi in ſuperiore, ex eo quod binæ componentes unius compoſitæ binis alterius æquales ſint, compoſitarum infers æqualitatem; hic ex eo quod binæ componentes unius compoſitæ binis alterius majores ſint, primam compoſitam ſecunda inferas majorem.

4 Eadem fere demonſtratione oſtendes ſi 12 : 4 major quam 20 : 10
& 4 : 2 : : 10 : 5, vel 12 : 4 major quam 20 : 10, & 4 : 2 : : 40 : 20 fore ex æquo 12 : 2 majorem quam 20 : 5 vel ex æquo perturbate 12 : 2 majorem quam 40 : 10.

5 Demum ſi ita ſe habeant rationes, ut prima major ſit ſecunda, tertia vero mi-

minor quarta ut 12 : 4 major quam 20 : 10 & 4 : 3 minor quam 10 : 5,

1 Vel exceſſus primæ rationis præ ſecunda æqualis eſt exceſſui quartæ præ tertia, ita ut earum denominatores proportionales ſint, ut in allato exemplo, tum vero compoſitæ æquales erunt: itaque cum denominatores primæ rationis 12 : 4 & ſecundæ 20 : 10 proportionales ſint denominatoribus quartæ 10 : 5 & tertiæ 4 : 3, nempe =

Denominatores.

Primæ.		Secundæ.		Quartæ.		Tertiæ.
3	:	2	::	2	:	$1\frac{1}{3}$

Hinc, ut inferius propoſitione 10 demonſtrabitur, compoſita ex extremis terminis 3 & $1\frac{1}{3}$, quod perinde eſt, atque ex prima & tertia ratione, quarum illi denominatores ſunt, æqualis erit compoſitæ ex mediis 2 & 2, quod perinde eſt, atque ex ſecunda & quarta ratione, quarum illi denominatores ſunt. Nam $3 \times 1\frac{1}{3} = 4$ & $2 \times 2 = 4$ eritque 12 : 3 :: 20 : 5.

2 At ſi exceſſus primæ præ ſecunda major ſit exceſſu quartæ præ tertia, ita ut ratio denominatoris primæ ad denominatorem ſecundæ major ſit ratione

denominatoris quartæ ad denominatorem tertiæ; compoſita ex prima & tertia major erit compoſita ex ſecunda & quarta. Sit 12 : 4 major quam 20 : 10 & 4 : 3 minor quam 10 : *6* erit

Denominatoris.

Primæ. Secundæ. Quartæ. Tertiæ.

$3 : 2$ major quam $1\frac{2}{3} : 1\frac{1}{3}$

& ex Compoſitis erit

$3 \times 1\frac{1}{3}$ major quam $2 \times 1\frac{2}{3}$ hoc eſt

$12 : 3$ major quam $20 : 6$

Eſto enim alius numerus ex. gr. $2\frac{1}{2} : 2 :: 1\frac{2}{3} : 1\frac{1}{3}$, erit $2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} = 2 \times 1\frac{2}{3}$ (1), atqui novus $2\frac{1}{2}$ minor primo 3 (2), ergo $3 \times 1\frac{1}{3}$ major quam $2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3}$ ſed ex demonſtratis $2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} = 2 \times 1\frac{2}{3}$, ergo $3 \times 1\frac{1}{3}$ major quam $2 \times 1\frac{2}{3}$ ſed (3) $3 \times 1\frac{1}{3}$ eſt $12 : 3$ & $2 \times 1\frac{2}{3}$ eſt $20 : 6$, ergo $12 : 3$ major quam $20 : 6$. q. e. d.

(1) *per 8. Modi part. 4. n. 1.*
(2) *per axio. 5. part. 2.*
(3) *per hypot. & Schol. 1. praced.*

3 Ex quo illud conſequens eſt, ut ſi exceſſus primæ præ ſecunda minor ſit exceſſu quartæ præ tertia, ita ut ratio denominatoris primæ ad denominatorem ſecundæ minor ſit ratione denominatoris quartæ ad denominatorem tertiæ; compoſita ex prima & tertia minor ſit compoſita ex ſecunda & quar-

quarta: ſit 12 : 4 major quam 20 : 10 & 4 : 3 minor quam 10 : 2, erit

Denominatoris.

Primæ. Secundæ Quartæ. Tertiæ.
3 : 2 minor quam 5 : $1\frac{1}{3}$
& ex Compoſitis erit
$3 \times 1\frac{1}{3}$ minor quam 2×5 hoc eſt
12 : 3 minor quam 20 : 2

Demonſtr. eadem fere eſt ac ſuperior.

Hoſce argumentandi modos, quo explicatior res eſſet, numeris potius quam lineis expoſuimus, qui tamen idem omnino valent de linearum quoque rationibus.

Quo vero maxime in promptu ſint, extet omnium hic brevis veluti Tabella.

Sit	12 : 4 : : 9 : 3 erit
Invertendo	4 : 12 : : 3 : 9
Permut.do vel Alternando	12 : 9 : : 4 : 3
Dividendo	12 − 4 : 4 : : 9 − 3 : 3
Componendo	12 + 4 : 4 : : 9 + 3 : 3
Convertendo	12 : 12 + 4 : : 9 : 9 + 3
vel	12 : 12 − 4 : : 9 : 9 − 3
Miſcendo	12+4 : 12−4 : : 9+3 : 9−3.

Sit 30 : 10 : : 12 : 4 & 10 : 5 : : 4 : 2 erit ex æquo 30 : 5 : : 12 : 2

Sit 30 : 10 : : 12 : 4 & 10 : 5 : : 24 : 12 erit ex æquo perturbate 30 : 5 : : 24 : 4.

Propoſitio 1.

Lib. 6. prop. 33. *In eodem vel in æqualibus circulis* cra, dff [*fig.* 3.] *anguli ſive ad centra* cba, dof, *ſive ad peripheriam* cra, dff *eam inter ſe rationem habent, quam arcus* ca, df *quibus inſiſtunt.* [*Idem intellige de Sectoribus*] *ita ut ſit angulus* cba : dof *ut arcus* ca *ad* df; *& angulus* cra : dff *ut arcus* ca : df.

Arcuum ca, df ſit communis menſura dq, quæ arcum df in tres æquales partes dividat, arcum vero ca in ſex æquales item partes, & a ſingulis diviſionum punctis ſingulæ rectæ ad centra b, & o ſint ductæ.

Uti æquales invicem ſunt portiones omnes, in quas arcus ca, & df ſunt diviſi [1], ita æquales invicem ſunt minores anguli, in quos diviſi ſunt anguli cba, dof [2], & cum dq tertia pars ſit arcus df, tertia item pars eſt anguli dof angulus doq, ergo

(1) *per conſtructionem.*

(2) *per hypot. & prop.* 10. *part.* 1.

dof:

dof : doq : : df : dq, & invertendo doq : dof : : dq : df, ſed etiam cba : doq : : ca : dq; nam per conſtructionem angulus cba diviſus eſt in ſex æquales angulos ſinguli angulo doq æquales, & arcus ca diviſus eſt in ſex æquales partes ſingulæ arcui dq æquales, habetur ergo
cba : doq : : ca : dq, &
doq : dof : : dq : df, & ex æquo
cba : dof : : ca : df. q. e. d.

Cumque anguli ad peripheriam cra, dff ſint angulorum ad centra dimidii [1], eandem inter ſe rationem habent quam ſua tota [2], eritque
cra : dff : : ca : df.

(1) *per prop. 9. part. 1.*
(2) *per ax. 2.*

Scholium.

1 Ex iſta propoſitione facile demonſtrari poteſt propoſitionis 11 partis primæ pars ſecunda, & tertia, itemque propoſitio 10 partis primæ.

2 Hinc facile eſt ad datum in recta punctum b [*fig.* 4.] angulum efficere dato angulo a æqualem. *Lib. 1. prop. 23.*

Centro enim a ſemidiametro ac arcum deſcribe cf crura anguli a ſecantem

tem in c & f; rurſum centro b ſemidiametro bl = ac arcum deſcribe lo, ex quo ſume lz = cf: per z ad b duc rectam bz, erit angulus b = a per antecedentem propoſitionem.

Lib. 1. prop. 31.

3 Facile quoque a dato puncto a [*fig.* 5.] recta ducitur datæ rectæ cf parallela. A puncto enim a quælibet ducatur recta al, quæ datam ſecet cf. Ad punctum a angulus fiat (1) fal = alf. Recta af datæ rectæ cf eſt parallela (2).

(1) per antec. Schol. 2.
(2) per Schol. prop. 4. p. 1.

4 Angulos adeo metiuntur Geometræ circuli peripheria hoc modo. Ex anguli vertice b [*fig.* 3.] tanquam centro circulum deſcribunt cujuslibet radii bc, modo utraque anguli crura peripheria ſecentur; quotque graduum eſt arcus ca cruribus anguli interceptus, totidem eſt & angulus.

5 Cum diameter ab [*fig.* 6.] circulum acbd in duas æquales partes dividat (3); arcus ſinguli acb, adb graduum ſunt 180 (4). Cumque perpendicularis cd per centrum ducta angulos utrinque faciat æquales aec, ceb, aed, deb, qui & recti dicuntur (5); arcus item ac = cb = bd = da (6), quorum ſinguli graduum ſunt 90. Duæ igi-

(3) per defin. 37. part. 1.
(4) per defin. 45. part. 1.
(5) per defin. 10. part. 1.
(6) per prop. 10. part. 1.

igitur circuli diametri ſibi invicem perpendiculares in quatuor æquales partes circulum partiuntur, quarum ſingulæ duobus ſemidiametris ſibi invicem perpendicularibus intercipiuntur, quæque Circuli Quadrantes appellantur. Quadrantes circuli.

6 Ex quo illud etiam conſequitur rectos angulos omnes 90 graduum eſſe: gradibus porro 90 minores eſſe acutos, majores autem obtuſos. (1)

(1) *per defin.* 11. *&* 12. *part.* 1.

Propoſitio 2.

Lib. 6. *prop.* 1.

Triangula [*fig.* 7.] abc, *&* efg, *&* *parallelogramma* abdc, efhg, *quæ eandem habent altitudinem* li, *ſive inter eaſdem ſunt parallelas* bh, ag, *eam inter ſe propoſitionem habent, quam baſes* ac, eg.

Demonſtr. Triangulorum altitudo li ſit ex. gr. palmorum 8, dimidia erit 4: baſis autem ac ſit 3, baſis eg 2.

Triangulum abc erit $3 \times 4 = 12$, & triangulum efg $2 \times 4 = 8$ (2), atqui 3 & 2 ſunt totorum 12 & 8 partes ſimiles (3), ergo (4) 12 : 8 : : 3 : 2, ſed 12 & 8 ſunt triangula abc & efg, 3 & 2 ſunt baſes ac, eg, ergo abc : efg : : ac : eg.

(2) *per Schol.* 9 *prop.* 7. *part.* 1.

(3) *per defin.* 13. *part.* 2.

(4) *per ax.* 1. *part.* 2.

Fa-

Facile eſt eandem ratiocinationem ad parallelogramma traducere.

Corollarium.

1 SImili ratione facile demonſtratur triangula, vel parallelogramma eandem, vel æqualem baſim habentia eſſe inter ſe ut altitudines.

Propoſitio 3.

Lib. 6. prop. 2. 1 *Si ad unum trianguli latus* bc [*fig.* 8.] *ducta fuerit parallela* fl, *ſecabit latera proportionaliter, erit nempe* af : fb :: al : lc.

2 *Si recta* fl *proportionaliter ſecet trianguli latera* ab, ac *erit inſecto lateri* bc *parallela.*

Prima pars. Ducantur rectæ bl, fc. Triangula flc, flb, quæ eandem baſim habent fl, & inter eaſdem ſunt parallelas fl, bc æqualia ſunt (1), ergo triangulum x eandem ad ſingula hæc triangula rationem habet, atqui triangulum x : lfc :: al : lc & (2) x : flb :: af : fb, ergo al : lc :: af : fb.

(1) per Schol. 10. prop. 7. part. 1.

(2) per prop. 2. part. 2.

Se-

Secunda pars Triangul.

lfc : x :: lc : al & (1)
flb : x :: fb : af, atqui
lc : al :: fb : fb (2), ergo
lfc : x :: flb : x, ergo

Triang. lfc = flb, cum ad unum x eandem habeant rationem: at habent quoque eandem baſim fl, ergo rectæ fl, bc, inter quas ſunt conſtructa, ſunt parallelæ (3).

(1) *per prop. 2. part. 2.*

(2) *per hypot.*

(3) *per Schol. 11. prop. 7. part. 1.*

Corollarium.

SI ad unum trianguli latus bc [*fig.* 8.] plures ſint ductæ parallelæ, io, fl, laterum ſegmenta erunt proportionalia, nempe af : fi : al : lo, & fi : ib :: lo : oc.

Si enim a puncto f ſit ducta fe parallela ad ac, jam
fi : ib :: ff : fe (4), ſed
ff = lo & fe = oc (5), ergo
fi : ib :: lo : oc, atqui
af : fi :: al : lo (4), ergo
af : fi :: al : lo & fi : ib :: lo : oc.

(4) *per prop. 3. antec.*

(5) *per Corol. 2. prop. 6. part. 1.*

Pro-

Propoſitio 4.

Lib. 6. prop. 4. *Triangula ſibi mutuo æquiangula ſunt ſimilia, nempe latera quoque æqualibus angulis oppoſita habent proportionalia.*

In triangulis X, Z (*fig.* 1.) ſit ang. a = f, c = l, b = i, erunt latera bc : il :: ba : if :: ac : fl.

Demonſtr. Triangulo X imponatur triangulum Z, ita ut æquales congruant anguli a & f, jam latus fi in latere jacet ab, & fl in ac; jam vero externus angulus ail interno abc æqualis eſt per hypoth., ergo il bc ſunt pa-
(1) per Schol. prop 4. p. 1. rallelæ (1) igitur bi : ia :: cl : la (2),
(2) per prop. 8. part 2. & componendo
bi + ia = ba : ia :: cl + la = ca : la, ſed per conſtructionem

ia = if & la = lf, ergo
ba : if :: ca : lf.

Quod ſi ita imponantur triangula, ut æquales anguli b & i congruant, conſequens erit ba : if :: bc : il tandem ſi congruant æquales ang. c & l, conſequens erit cb : li :: ac : fl, ergo ba : if :: bc : il :: ac : fl.

Co-

Corollarium.

SI duo triangula X, Z (*fig.* 28. *p.* 1.) duos angulos habuerint viciſſim æquales b = f & c = i, lateraque vel inter æquales angulos poſita bc = fi, vel æqualium angulorum alteri oppoſita ac = li vel ab = lf; triangula æquiangula erunt, & æquilatera. *Lib. 1. prop. 26.*

Æquiangula (1). Cum vero æquiangula ſint latera habent proportionalia (2) bc : fi :: ba : fl :: ca : il, ſed per hypot. bc = fi, ergo &
ba = fl & ca = il.

(1) *per Corol. 4. prop. 5. part 1.*
(2) *per antec. prop.*

Propoſitio 5.

Si duo triangula latera habeant ſibi mutuo proportionalia, æquiangula ſunt: *Lib. 6. prop. 5.*

Hoc eſt ſi ab : rf :: ac : rq :: bc : fq [*fig.* 9.] *anguli, qui antecedentibus ſunt oppoſiti; angulis, qui ſunt conſequentibus oppoſiti æquales ſunt, nempe* =

Ant. opp.	*ang.*		*ang.*	*opp. conſ.*
ab	c	=	q	rf
ac	b	=	f	rq
bc	a	=	r	fq

Ad

Ad latus r q intelligatur factum triangulum r n q triangulo a b c æquiangulum, ſitque ang. Z = c, X = a, t = b.

(1) *per antec. prop.* Jam (1) a b : r n :: a c : r q, ſed per hypot. a b : r f :: a c : r q, ergo a b : r n :: a b : r f.

Rectæ igitur r n & r f, ad quas ſingulas recta a b eandem rationem habet, æquales ſunt. Eodem modo oſtendes f q = q n, latus vero r q utriſque triangulis ſ & t commune, ergo triangula ſ & t æquilatera ſunt; ergo anguli æqualibus lateribus oppoſiti ſunt æquales (2), hoc eſt

(2) *per prop. 2. part. 1.* f = t, r = X, q = Z, ſed per conſtruct. t = b, X = a, Z = c, ergo f = b, r = a, q = c. q. e. d.

Scholium.

Lib. 6. prop 6. SI duo triangula ſ & p [*fig. 9.*] duos habeant æquales invicem angulos o & a lateraque eos angulos continentia ſint proportionalia a b : r f :: a c : r q, triangula ſunt ſimilia.

Eodem enim modo, quo ſupra, in triangulis ſ & t oſtendes r f = r n, cumque r q ſit utrique commune, & per con-

conſtructionem & hypotheſim angulus o = X, erunt quoque (1) ſ = t, & i = Z & triangulum ſ triangulo t, hoc eſt per conſtructionem triangulo p æquiangulum, ergo (2) triangula ſ & p ſunt ſimilia.

(1) *per Schol. 1. ad ax. 12. part. 1.*

(2) *per prop. 4. part. 2.*

Propoſitio 6.

Triangulum rectangulum a b f [*fig.* 10.] *perpendicularis* b c *ab angulo recto ad baſim ducta in partes dividit toti & inter ſe ſimiles*.

Lib.6. prop.8.

In triangulis a b f, b c f angulus f communis utrique eſt; ang. a b f = n, utpote uterque rectus per hypotheſim, ergo & ang. b a f = o (3), ergo triangula a b f, b c f ſunt ſimilia (4).

Eadem ratione oſtendes a b f, a b c ſimilia eſſe; cumque triang. a b c, b c f uni a b f ſimilia ſint, ſimilia ſunt & inter ſe.

(3) *per Corol. 4. prop. 5. part. 1.*

(4) *per prop. 4. part. 2.*

Corollaria.

1 PErpendicularis b c [*fig.* 10.] ab angulo recto ad baſim ducta eſt media proportionalis inter baſis ſectiones.

Triangula enim b a c & b c f ſunt ſimi-

(1) *per antec. propoſit.* (2) *per prop. 4. part. 2.*

milia (1): in his ex demonſtratis eſt i = f & a = o, ergo (2) & iis oppoſita latera erunt ac : cb :: cb : cf.

2 Utrumlibet ex lateribus trianguli rectanguli abf rectum angulum b comprehendentibus eſt medium proportionale inter latus af recto angulo oppoſitum, eamque hujus lateris portionem, quæ inter perpendicularem eſt & ipſum latus, quod medium proportionale dicimus, nempe af : bf : cf ÷

af : ab : ac ÷

Eadem quippe ratione qua ſuperius oſtendes af : bf :: bf : cf &

af : ab :: ab : ac.

5 Hic facile eſt datis duabus rectis ab, bc [*fig.* 11.] tertiam proportionalem invenire.

Junge ab, bc ad angulum rectum; duc ac; ad punctum c duc perpendicularem cx quantumlibet productam: producatur ab dum occurrat in cx; bx eſt tertia proportionalis quæſita.

(3) *per Corol. 1.*

Nam (3) ab : bc :: bc : bx.

Pro-

Propoſitio 7.

Datis tribus rectis ab, bc, af [*fig.* 12.] *quartam proportionalem invenire.* Lib. 6. prop. 12.

Statuantur datæ rectæ, ut in figura: duc rectam bf, cui a puncto c duc parallelam cl; producatur af, dum rectæ cl occurrat; erit fl quarta proportionalis.

Nam (1) ab:bc::af:fl. (1) per prop. 3. part. 2.

Propoſitio 8.

Datis duabus rectis ac, cb (*fig.* 13.) *mediam proportionalem invenire.* Lib. 6. prop. 13.

Ex datis duabus rectis ac, cb una ſit recta ab; hanc in partes divide æquales ao ob (2); centro o radio ao ſemicirculum deſcribe afb: a puncto c, quo datæ rectæ concurrunt, ducta ad peripheriam perpendicularis cf eſt, quam quæris, media proportionalis. (2) per Corol. 1. prop. 1. part. 1.

Ductis enim ad punctum f rectis af, fb triangulum afb rectangulum eſt (3), ergo (4) ac:cf:cb ∺ (3) per prop. 11. part. 1. (4) per Corol. 1. prop. 6. part. 2.

Propoſitio 9.

1 *Parallelogramma æqualia* X, Z (*fig.* 14.) *quorum alterum* X *angulum habeat* Lib. 6. prop. 14.

c *angulo* o *alterius æqualem, qua æquales angulos comprehendunt latera* a c, c l, f o, o b *habent reciproca* (1), *hoc eſt* a c : o b : : f o : c l.

(1) *vide defin. 15. part. 2.*

2 *Et ſi latera habent reciproca parallelogramma ſunt æqualia.*

Ita ſtatuantur parallelogramma, ut æquales anguli c & o ſint ad verticem oppoſiti, & productis i l, f b in q parallelogrammum r ſit confectum.

Prima pars demonſtr. Cum per hypotheſim ſit parallelogrammum X = Z, erit X : r : : Z : r, atqui (2)

(2) *per prop. 2. part. 2.*

X : r : : a c : o b &

Z : r : : f o : c l, ergo

a c : o b : : f o : c l. q. e. d.

Secunda pars

X : r : : a c : o b (2) &

Z : r : : f o : c l, atqui per hypoth. a c : o b : : f o : c l, ergo

X : r : : Z : r, ergo

X = Z. q. e. d.

S c h o l i u m.

Lib. 6. prop. 15.

EAdem omnino ratione, eadem de triangulis demonſtrari queunt.

Pro-

Digitized by Google

Propoſitio 10.

1 *Si fuerint quatuor rectæ proportionales* ab : fi : : il : bc (*fig.* 15.) *rectangulum* X *ſub extremis* ab, bc *æquale eſt rectangulo* Z *ſub mediis* fi, il. Lib. 6. prop. 16.

2 *Et ſi rectangulum ſub extremis æquale ſit rectangulo ſub mediis, rectæ illæ proportionales ſunt.*

Prima pars in numeris eſt manifeſta. Sit 12 : 4 : : 9 : 3
$12 \times 3 = 36$ &
$4 \times 9 = 36$.

Demonſtr. in lineis. Rectangula X, Z æquiangula ſunt (1), latera quoque æquales angulos comprehendentia habent reciproca, nam per hypotheſim ab : fi : : il : bc, ergo (2) X = Z. (1) per hypot. & defin. 23. part. 1. (2) per prop. 9. part. 2.

Secunda pars. Cum rectangula X & Z ſint æqualia per hypoth. & æquiangula, quæ æquales angulos comprehendunt latera habent reciproca (2), ergo ab : fi : : il : bc.

COROLLARIUM.

1 EST igitur in promptu dignoſcendæ rationum æqualitatis, vel inæqualitatis certiſſimum argumentum.

Nam ſi multiplicatis mediis inter ſe terminis, extremiſque inter ſe, producta ſint æqualia, æquales ſunt proportiones, ſin aliter inæquales.

Lib. 6. prop. 17. 2 Si tres quantitas (*fig.* 16.) continue proportionales ſint a e, i o, u y, vel in numeris 2.4.8 $\div\!\!\div$, rectangulum ſub extremis, æquale eſt quadrato medii; nam

a e . i o . u y $\div\!\!\div$ perinde eſt ac

a e : i o : : i o : u y, ergo per ant. propoſit.

$ae \times uy = io \times io = io_q$, & in numeris

$2 \times 8 = 16 = 4 \times 4 = 4_q = 16$.

3 Hinc facile invenies. Primo datis duobus numeris 4, 8 tertium proportionale. Sit 8_q, nempe $8 \times 8 = 64$ iſtud divide per 4 $\frac{64}{4} = 16$, erit iſte tertius proportionalis; nam

(1) per prop. 10. antec. $4 \times 16 = 64 = 8_q$, ergo (1)

4 : 8 : 16 $\div\!\!\div$

Secundo, datis tribus numeris 4.8.6 quartum proportionalem. Fac rectangulum $8 \times 6 = 48$ hunc divide per 4 $\frac{48}{4} = 12$, erit iſte quartus proportionalis; nam

$4 \times 12 = 48$ &

$8 \times 6 = 48$, ergo (1)

4 : 8 : : 6 : 12.

Ter-

Tertio, datis duobus numeris 8 & 2 medium proportionalem. Fac rectangulum $8 \times 2 = 16$

$\sqrt{16} = 4$ erit iſte medius proport. nam $8 \times 2 = 16$

$4 \times 4 = 16$, ergo (1)

$8 : 4 : 2 \div$

(1) *per prop. 10. antec.*

Propoſitio 11.

Æquiangula parallelogramma X, Z (*fig.* 14.) *rationem habent inter ſe compoſitam ex rationibus, quas inter ſe habent latera æquales angulos comprehendentia, cum ſingula unius parallelogrammi ſingulis alterius comparentur, ita* $X : Z = \frac{ac}{ob} \times \frac{cl}{of}$

Lib. 6. prop. 23.

Fiat ut cl : of, ita ob ad quartam o. Ratio ac : o eſt ex rationibus compoſita ac : ob, & ob : o (2) & cum per hypoth. ſit ob : o :: cl : of, erit

$$ac : o = \frac{ac}{ob} \times \frac{cl}{of}$$

(2) *per Schol. 1. Modi 7.*

jã vero X : r :: ac : ob & r : z :: cl : of (3) ſed per hypoth. cl : of :: ob : o, ergo X : r :: ac : ob & r : z :: ob : o, & ex æquo X : Z :: ac : o, atqui ex demonſtr.

(3) *per prop. 2. part. 2.*

$ac : o = \frac{ac}{ob} \times \frac{cl}{of}$, ergo

$X : Z = \frac{ac}{ob} \times \frac{cl}{of}$.

Bre-

Brevius in numeris ſit

ac, cl erit X

8, 2, $8 \times 2 = 16$

ſit ob, of erit Z

4, 3, $4 \times 3 = 12$

& $\frac{16}{12} = \frac{8}{4} X \frac{2}{3} = \frac{8 \times 2}{4 \times 3} = \frac{16}{12}$.

Corollaria.

1 Rectangula omnia rationem habent inter ſe ex rationibus compoſitam baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem.

2 Omnia parallelogramma, cum ſint rectangulis ad eandem baſim, & inter eaſdem parallelas conſtitutis æqualia, (1) eandem rationem habent inter ſe, quam rectangula, compoſitam nempe ex rationibus baſis ad baſim, altitudinis ad altitudinem.

(1) *per prop. 7. p. 1.*

3 Eandem omnino rationem habent inter ſe quælibet triangula, quæ, cum ſingula ſint parallelogrammorum pars dimidia (2), eandem inter ſe rationem habent, quam tota parallelogramma (3).

(2) *per Corol. 3. prop. 6. p. 1.*

(3) *per Axio. 2. part. 2.*

4 Triangula duo i, o (*fig.* 17.) quæ habent ſingula angulum unum a, uni c alte-

alterius triang. æqualem, rationem habent inter ſe compoſitam ex laterum rationibus æquales angulos comprehendentium ab : ce, & ad : cf, uti ſuperius de parallelogrammis demonſtratum eſt. Sunt enim parallelogrammorum æquiangulorum pars dimidia (1). *(1) per Corol. 3. & 5. prop. 6. part. 1.*

5 Triangula ſimilia g, h (*fig.* 18.) rationem habent duplicatam rationis laterum æqualibus angulis ſubtenſorum ad, cf. *Lib. 6. prop. 19.*

Habent enim angulum a = c per hypoth., ergo [2] triang. $g : h = \frac{ab}{ce} \times \frac{ad}{cf}$, *(2) per Corol. 4. anteced.*

ſed $ab : ce :: ad : cf$ (3) *(3) per defin. 14. part. 2.*

ergo (4) $\frac{ab}{ce} \times \frac{ad}{cf} = \frac{ad}{cf} \times \frac{ad}{cf} = g : h$. *(4) V. Sch. 2. modi 7.*

6 Triangula, de quibus quarto, & quinto numero, habent ipſa quoque inter ſe rationem ex rationibus compoſitam baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem, uti de omnibus triangulis dictum eſt numero tertio.

Ducantur enim triangulorum altitudines al, ci, junganturq. lb, ie. Angulus lad = icf, ſunt enim ambo recti, quibus ſingulis ſi dempſeris ſingulos per hypoth. æquales angulos bad, ecf,

ecf, reliqui lab = ice at alb = cie ſunt enim recti (1), ergo triang. n & m ſunt æquiangula (2), ergo latera habent proportionalia (3) & al : ci :: ab : ce, quæ ergo triangula, ut numero 4, rationem habent compoſitam ex ab : ce & ad : cf rationem quoque habent compoſitam ex ad : cf & al : ci, nempe baſis ad baſim & altitudinis ad altitudinem.

(1) per Corol. 8. prop. 7. part. 1. & per prop. 4. p. 1. (2) per Corol. 4. prop 5. p. 1. (3) per prop. 4. part. 2.

Et in quibus triangulis, ut numero 5, eſt ab : ce :: ad : cf, erit quoque ex ſuperius demonſtratis al : ci :: ad : cf

$$\& \quad \frac{ad}{cf} \times \frac{ad}{cf} = \frac{al}{ci} \times \frac{ad}{cf}.$$

Propoſitio 12.

Similia polygona abcde, mghil = (*figura 19.*)

Lib. 6. prop. 20.

1 *Dividentur in triangula numero æqualia, & invicem ſimilia, nempe* p & ſ, q & f, r & u =

2 *Totis proportionalia:*

3 *Et polygonorum ſimilium proportio eſt duplicata proportionis laterum* ab, mg *inter æquales angulos* a & m, b & g *exiſtentium.*

Prima pars, ab angulorum alterutro a & m ad quos angulos duci poſſunt no-

novæ rectæ a c, a d, m h, m i, ducantur: polygona, quæ per hypot. angulis conſtant numero æqualibus, in triangula dividuntur numero æqualia; in triangulis porro p & ſ per hypoth. angulus b = g & a b : m g :: b c : g h, ergo triangula p & ſ ſunt ſimilia (1). Eadem (1) *per Schol. prop. 5. p. 2.*
ratione ſimilia demonſtrantur triangula r & u. Cum vero ſit angulus b c d = g h i, iis ſi demas angulos b c a, g h m ex demonſtratis æquales, reliqui a c d = m h i. Eadem ratione demonſtrantur a d c = m i h, ergo etiam c a d = h m i (2), triangula igitur q & ſ ſunt (2) *per Corol. 4. prop. 5. p. 1.*
æquiangula, ergo & ſimilia (3). (3) *per prop. 4. part. 2.*

Secunda pars, p eſt ad ſ in duplicata ratione a c : m h (4), in eadem ratione (4) *per Corol. 5. prop. 11. part. 2.*
eſt q : ſ (4), ergo p : ſ :: q : ſ, at etiam (4).

q : ſ :: r : u, ergo

p : ſ :: q : ſ :: r : u, ergo (5) (5) *per axiom. 7. part. 2.*

p + q + r = a b c d e : ſ + ſ + u = m g h i l :: p : ſ, vel q : ſ, vel r : u.

Tertia pars, ex demonſtratis a b c d e : m g h i l :: p : ſ, ſed p : ſ eſt in ratione duplicata a b : m g (4), ergo & polygonum ad polygonum in eadem erit duplicata ratione.

Co-

Corollarium.

(1) *V. defin. 31. part. 1.*

OMnes ordinatæ, ſeu regulares figuræ (1) ſunt inter ſe in duplicata ratione lateris unius figuræ ad alterius, ſunt enim ſimiles.

Propoſitio 13.

Lib. 6. prop. 31.

Ex figuris ſimilibus quibuslibet ad latera trianguli rectanguli a c b [*fig.* 20.] *deſcriptis, quæ ad latus* a b *recto angulo* c *oppoſitum, quod hypotenuſa dicitur, eſt deſcripta* f, *æqualis eſt duabus* l *&* r *deſcriptis ad reliqua latera* a c, c b, *quæ cateti appellantur.*

Hypotenuſa. Cateti.

(2) *per prop. 12. part. 2.* (3) *per Coral. 2. prop. 6. p. 2. & Sch. 2. modi 7.*

f eſt ad r in duplicata ratione a b : b c [2]
atqui $\frac{ab}{bc} \times \frac{ab}{bc} = \frac{ab}{bo}$ ſunt enim ab, bc, bo ∺ (3)
ergo f : r : : a b : b o eadem ratione oſtendes
f : l : : a b : a o, ergo
f : r + l : : a b : b o + a o, ſed
a b = b o + a o, ergo etiam
f = r + l.

Corollarium.

Lib. 1. prop. 47.

QUadratum ergo hypotenuſæ æquale eſt catetorum quadratis ſimul ſumptis. Omnia enim quadrata ſunt inter ſe ſimilia [4].

(4) *per defin. 20. part. 1. & 14. part. 2.*

PARS

PARS TERTIA.

Definitiones.

1 Figura rectilinea circulo eſt inſcripta, [*fig.* 1. 2.] cum ſinguli figuræ anguli vertices habent in circuli peripheria. Ei figuræ circulus dicitur circumſcriptus. *Figura circulo inſcripta.* *Circulus figuræ circumſcriptus.*

2 Eſt vero figura circulo circumſcripta, [*fig.* 3.] cum ſingula ejus latera circuli peripheriam tangunt. Ei figuræ circulus dicitur inſcriptus. *Figura circulo circumſcripta.* *Circulus figuræ inſcriptus.*

3 Figura deſinere dicitur in figuram, cui eſt inſcripta, vel circumſcripta, ex. gr. polygonum deſinere dicitur in circulum, cui eſt inſcriptum, vel circumſcriptum, cum polygonum ad circulum adeo accedit, ut differentia polygoni a circulo ſit quacunque data minor; vel quod eodem redit, cum differentia polygoni a circulo prope nulla eſt. Res per ſequentem propoſitionem fiet adhuc explicatior.

Pro-

Digitized by Google

Propoſitio 1.

Dato circulo f i g h [*figura* 1. 2.] ***po-lygonum inſcribere ſimile dato polygono*** a b c d e ***circulo jam inſcripto.***

A centro l circuli a b c d e ad angulos dati polygoni a b c d e duc rectas l a, l b, l c, l d, l e. Et a centro m circuli f g h i duc rectam quamlibet m n; ad punctum m rectæ m n fac (1) angulum n m o = b l c, itemque angulum o m q = c l d, itaque pergas donec ad centrum m tot extent anguli, quot ad centrum l, & quidem ſinguli ſingulis ſucceſſive æquales: Junge porro n o, o q, q b, b r, r n; polygonum n o b q r circulo f g h i inſcriptum ſimile eſt polygono a b c d e.

Triangula l d c, & q m o per hypotheſim angulos habent d l c = q m o, igitur ſummæ reliquorum l d c + l c d = m q o + m o q (2). Cum vero ea triangula ſint iſoſcelia (3) erit angulus l d c = l c d (4), adeoque ſinguli ſummæ l d c + l c d pars dimidia; itemque angulus m q o = m o q, adeoque ſinguli ſummæ m q o + m o q pars dimidia; atqui

(1) *per Sch.* 2. *prop.* 1. *p.* 2.

(2) *per prop.* 5. *part.* 1.
(3) *per defin.* 18. & 38. *p.* 1.
(4) *per Schol.* 3. *ad ax.* 12. *part.* 1.

atqui ſummæ ldc + lcd = mqo + moq ex demonſtratis, igitur & earum dimidiæ partes æquales invicem erunt ldc = mqo = lcd = moq. Eodem modo oſtendes æquiangula eſſe triangula lcb, mon, & angulos lcb = mon, igitur lcd + lcb = moq + mon hoc eſt ang. c = o; eadem ratione oſtendes b = n, a = r, e = b, d = q. Polygona igitur ſunt æquiangula.

Jam vero ex demonſtratis triangulum ldc, triangulo mqo æquiangulum eſt, ergo (1) latera habent proportionalia, & dc : qo :: lc : mo; æquiangula item ſunt ex demonſtratis triangula lcb, mno, adeoque latera habent proportionalia & cb : on :: lc : mo, ergo dc : qo :: cb : on, eodē modo oſtendā cb : on :: ba : nr, & ſic de reliquis lateribus. Eſt igitur circulo figh inſcriptum polygonum ſimile dato abcde circulo jam inſcripto.

(1) *Per prop. 4. part. 2.*

Co-

Corollaria.

EAdem omnino ratione licet & triangulum, & quadrilaterum, & figuram aliam quamlibet alteri ejuſdem generis circulo jam inſcriptæ ſimilem inſcribere.

Propoſitio 2.

Lib. 12. prop. 1.

Polygona ſimilia circulis inſcripta [*fig.* 4. 5.] *ſunt in duplicata ratione diametrorum* a f, i c, *vel ſemidiametrorum* a z, i x.

Ducantur rectæ f b, o a, c l, r i. Cum polygona per hypotheſim ſimilia ſint, erit ang. o b a = r l i, & latera o b : b a : : r l : l i, ergo triangula o b a, r l i ſunt ſimilia (1), adeoq. anguli b o a = l r i, ergo & ang. b f a = l c i, cum iiſdem inſiſtant arcubus, quibus duo priores æquales anguli (2), atqui anguli f b a, c l i recti ſunt (3) proindeque æquales, ergo & tertius f a b = c i l (4); triangula igitur f b a, c l i ſunt ſimilia (5), ergo b a : l i : : f a : c i, atqui polygona ſunt in duplicata ratione b a : l i (6), ergo etiam in duplicata f a : c i.

(1) *per Schol. prop. 5. p. 2.*
(2) *per prop. 20. part. 1.*
(3) *per prop. 21. part. 1.*
(4) *per Corol. 4 prop. 5. part. 1.*
(5) *per prop. 4. part. 2.*
(6) *per prop. 22. part. 2.*

Co-

Corollaria.

1 F Igurarum rectilinearum ſimilium circulis inſcriptarum latera homologa ſunt inter ſe ut circulorum diametri vel ſemidiametri.

2 Polygonorum ſimilium circulis inſcriptorum, immo & quarumlibet figurarum ſimilium circulis inſcriptarum ambitus ſunt inter ſe, ut circulorum diametri.

Singula enim latera ſunt inter ſe ut diametri (1), ergo ſimul omnia erunt ad ſimul omnia ut circulum diametri (2).

(1) *per Cor. 1. antec.*

(2) *per Axio. 7. part. 2.*

Propoſitio 3.

Polygona circulo inſcripta in circulum deſinunt.

Eſto circulo inſcriptum polygonum a b c d e (*fig. 6.*) ſegmenta a f e, e g d, d h c, c i b, b l a, ſunt differentia circuli a polygono; quod ſi arcum a f e æquilater dividas in f, ductis a f, f e, differentia circuli a polygono quantum ad hoc ſegmentum a f e ſunt bina ſegmenta a m f, f n e ipſo ſegmento a f e minore, & ſi ar-

cus a m f, f n e adhuc æqualiter ſeces in m & n, ductis a m, m f, f n, n e, differentia circuli a polygono ſunt quatuor ſegmenta a m, m f, f n, n e binis a m f, f n e minora; quod ſi arcus uſque & uſque æqualiter ſeces, uti adhuc factum eſt, jam differentia circuli a polygono quantum ad hoc ſegmentum fiet quacumque data minor, ſeu quod perinde eſt, differentia circuli a polygono quantum ad hoc ſegmentum ad tam exilia ſegmenta erit deducta, ut merito nulla videatur; quod factum eſt in hoc ſegmento fieri in omnibus poteſt, ergo poteſt polygonum circulo inſcriptum ad ipſum circulum adeo accedere, ut eorum differentia ſit quacumque data minor, ergo in circulum deſinere.

Propoſitio 4.

prop. 2. lib. 12. *Circulorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum, ſeu ſemidiametrorum.*

Polygonorum ſimilium circulis inſcriptorum proportio ſemper eſt duplicata proportionis diametrorum (1), poſſunt inſcribi circulis ſimilia polygo-

(1) per prop. 2. part. 3.

gona in circulos deſinentia (1), ergo polygonorum in circulos deſinentium proportio eſt duplicata proportionis diametrorum, ergo hujuſmodi item erit circulorum, in quos deſinunt proportio.

(1) *per prop. 1. & 3. part. 3.*

Corollarium.

Generaliter enim, ſi quæ quibus figuris inſcribuntur, in eas deſinunt, quæ eſt inſcriptarum proportio, eadem erit & figurarum, quibus inſcribuntur, & e converſo. Si enim in eas deſinunt, differentiæ adeo minimæ ſunt, ut merito nullæ habeantur. (2)

(2) *per deſin. 3. part. 3.*

FINIS.

Digitized by Google

INDEX RERUM.

A

ALtitudo Rectanguli 35
Paralellogrammi cujuſque ibid.
Trianguli 36
Ambitus. v. Similium Figurarum, vel Polygonorum.
Angulus Rectilineus 9
Curvilineus ibid.
Mixtus ibid.
Rectus 10
Obtuſus ibid.
Acutus ibid.
Externus 14
Trianguli externus duobus internis oppoſitis eſt æqualis 27
ſingulis internis oppoſitis major ibid.
ad Centrum Circuli 15. 39. 40. 72
ad Peripheriam ibid.
in Semicirculo 41
in Segmento 15. 41
Arcui inſiſtens. 15. 40
Trianguli qui majori lateri opponitur eſt major angulo qui opponitur minori 23
Anguli Obliqui 10
Lineæ rectæ alteri rectæ inſiſtentis duobus rectis æquales 10
Triangulorum æqualibus lateribus oppoſiti æquales 21
Tres ſimul cujuſcunque Trianguli duobus rectis æquales 27
Ad Verticem oppoſiti æquales 24
Parallelarum recta ſectarum alterni æquales 24
interni ad eandem partem æquales ibid.
exter-

Parallelarum externus angulus interno ad eandem partem æqualis ibid.
Anguli Parallelogrammi. v. Parallelogrammi.
Anguli Crura 9
Vertex ibid.
Angulum in duos dividere æquales angulos 22
facere dato angulo æqualem 75
Angulorum rectilineæ figuræ ſumma 28
metiendorum ratio 74
Rectorum gradus 75
Acutorum gradus ibid.
Obtuſorum gradus ibid.
Antecedens Rationis 43
Arcus Circuli 15. 40
Circulorum æquales 19
Area Rectanguli. v. Parallelogrammi.
Trianguli. v. Trianguli.
Argumentandi modi de Proportionibus 56
Axiomata 16. 51

B

Baſis Rectanguli 35
Parallelogrammi cujuſque ibid.
Trianguli 36

C

Cateti 92
Circulus 14
Figuræ inſcriptus 93
circumſcriptus ibid.
Circuli Centrum 14
Diameter }
Circumferentia }
Semidiameter } ibid.
Semicirculi }
Arcus }
Segmenta } 15

Circuli Angulus ad Centrum 15
ad Peripheriam)
in Segmento)
Arcui inſiſtens) ibid.
Sector)
Quadrantes 75
Circuli æquales 19
Circulo Polygonum alteri ſimile inſcribere 94
& figuram alteri ſimilem 96
Circulorum proportio 98
Componendo 59
Compoſita ratio 64
Conſequens Rationis 43
Continue proportionales 47. 86
Convertendo, ſeu Converſio Rationis 60
Corda ſeu ſubtenſa Arcus 15
Cordæ Arcuum æquales 19
Corpus, ſeu ſolidum mathematicum 8
Crura Anguli 9
Cubus 55
Cubica radix ibid.

D

Definitiones 8. 43. 93
Denominator Figuræ 29
Rationis 45
Diameter, ſeu Diagonalis Quadrilateri, ſeu Parallelogrammi 13
Circuli 14
Diametri æquales 19
Dividendo 58

Eucli-

E

Euclidis Libri 1. propoſitio	13	10
	4	17
	5	18
	6	19
	8	21
	9	22
	18, 19	23
	25, 27	24
	28, 29	26
	32	27
	34	30
	41	31
	35, 36	33
	37, 38, 39, 40, 13	37
	23	73
	31	74
	26	79
	47	92
Libri 3. propoſitio	26, 27	19
	16	37
	20	39
	28, 29	40
	31	41
Libri 5. propoſitio	16, 19	51
	8	52

 57

	26, 27	57
	17	58
	29, 18, 21	59
	30	61
	22	63
	24	66
	23	67
	31, 32	68
Lib. 6. propoſitio	33	72
	1	75
	2	76
	4	78
	5	79
	6	80
	8	81
	12, 13, 14	83
	15	84
	16	85
	17	86
	23	87
	19	89
	20	90
	31	92
Lib. 12. propoſitio	1	96
	2	98

Ex Æquo 63
perturbate 67
Exponens rationis 45
Externus Angulus. v. Angulus.

Figu-

F

Figura plana 11
Rectilinea 12
Curvilinea ibid.
Polygona 14
Ordinata ſeu regularis ibid.
Circulo inſcripta 93
circumſcripta ibid.
in Circulum deſinens ibid.
Figuræ Rectilineæ Angulorum ſumma 28
quam omnes ejuſdem ſpeciei figuræ habent æqualem 29
Denominator ibid.
Figuræ ordinatæ & regulares ejuſdem ſpeciei ſunt
æquiangulæ 30
ſimiles 49
reciprocæ 50
Figuram alteri ſimilem Circulo inſcribere 96

G

Gradus Peripheriæ 16
Angulorum rectorum, acutorum, & obtuſorum 75

H

Homologi Termini 48
Homologorum laterum figurarum rectilinearum Circulis inſcriptarum proportio 97
Hypotenuſa 92

I

Intervalli menſura 11
Invertendo 56
Joſoſceles 12
habet angulos ad baſim æquales. 18

Latus

L

Latus Trianguli. v. Trianguli.
Parallelogrammi. v. Parallelogrammi.
Linea 8
recta 9
curva ibid.
Lineam rectam in duas æquales partes dividere 22

M

Media proportionalis 81. 82
hanc invenire 83
Medium proportionale. v. proportionale
proportionalem numerum invenire. 87
Miſcendo 61
Modi argumentandi de Proportionibus 56

N

Numerum proportionalem. v. proportionalem.

O

Obliqui Anguli 10
Obtuſus Angulus ibid.
Obtuſorum Angulorum gradus 75
Ordinata Figura 14

P

Parallelæ 11
recta ſectæ habent alternos angulos æquales. 24
externum æqualem interno ad eandem partem ibid.
binos internos ad eandem partem æquales ibid.
ſunt binæ rectæ, quæ alia recta ſectæ an-

angulos habent eo modo quo ſupra 26
Parallelam ducere 74
Parallelogrammum 13
Diametro dividitur in duas æquales partes 30
Parallelogrammi anguli oppoſiti æquales ſunt ibid.
Latera oppoſita æqualia 31
quatuor anguli quatuor rectis æquales ib.
Rectanguli Area quomodo producatur 34
quomodo exprimitur ibid.
Baſis altitudo 35
cujuſque eadem ibid.
Parallelogramma æquiangula 32. 87
æqualia 33. 84. 85
Parallelogrammorum proportio 75. 88
latera reciproca 84
Pars aliquota 48
aliquanta ibid.
Partes ſimiles 49
Perpendicularis 10
Perpendiculare latus Trianguli 28
Peripheria Circuli 14
Peripheriæ gradus 16
Permutando 57
Planum 11
Polygonæ Figuræ 14
Polygona Circulo inſcripta in Circulum deſinunt 97
Polygonum alteri ſimile Circulo inſcribere 94
Polygonorum ſimilium proportio 90
& Circulis inſcriptorum 96
& Ambiturum 97
Poſtulata 20
Problemata quid ſint 16
Proportio. v. Ratio.
Proportionis continuæ ſignum 48
de Proportionibus modi argumentandi 56
Proportionalis media 81
hanc invenire 83
Proportionalis ſectio Triangulorum 76. 77

Pro-

Proportionale medium ex lateribus Trianguli 82
Proportionalem tertiam invenire 82
quartam 83
tertium numerum 86
quartum ibid.
medium 87
Proportionales Termini. v. Termini
Rectæ 85
reciproce 80
continue 47. 86
Punctum 9

Q

Quadrantes Circuli 75
Quadratum 13
Quadrati Area 34
Radix 35. 55
Quadrilaterum 12
Quadrilateri quatuor anguli quatuor rectis æquales 31
Quartam proportionalem invenire 83

R

Radius Circuli 14
Radix Quadrati ſeu Quadratica 35. 53
Cubica 55
Ratio ſeu proportio 43
Æqualitatis 44. 46
Inæqualitatis ibid.
majoris 44
minoris ibid.
Compoſita 64
Duplicata 65
Subduplicata ibid.
Triplicata ibid.
Subtriplicata 66
Rationis ſignum 44

Rationis exponens vel Denominator 45
Converſio 60
Rationes æquales 46
inæquales ibid.
Rationum majoris inæqualitatis quæ major, quæ minor 47
Minoris quæ major quæ minor ibid.
Æqualium ſignum ibid.
Æqualitatis vel inæqualitatis dignoſcendæ modus 85
Reciproce proportionales, vel Reciprocæ 50
Reciprocæ Figuræ ibid.
Reciproca Latera Parallelogrammorum 84
Rectam lineam in duas æquales partes dividere 22
Rectangulum 12
Rectanguli area 34
Rectangulorum ratio 88
Rectilineæ Figuræ angulorum ſumma 28
Rectus Angulus 10
Rectorum angulorum gradus 75
Regularis figura 14
Regularium figurarum proportio 92
Rombus 13
Romboides ibid.

S

Scalenum 12
Sectio Triangulorum proportionalis 76. 77
Sector Circuli 15
Segmenta Circuli ibid.
Semicirculi 14
Semidiametri Circuli ibid.
æquales 19
Signa Geometrica 54
Similes partes 49
Figuræ ibid.
Similium figurarum latera homologa 97
Circulis inſcriptarum Ambitus quam proportionem habeant ibid.

Soli.

Solidum Mathematicum 8
Subtenſa ſeu Corda Arcus 15
Superficies 8
Plana 11
Curva ibid.

T

Tangens Circuli 37
Termini diſcretim proportionales 47
continue ibid.
Horum ſignum 48
Medii ibid.
Homologi ibid.
Tertiam proportionalem invenire 82
Tertium proportionalem numerum 86
Theoremata quæ ſint 16
Trapezium 15
Triangulum 12
Æquilaterum)
Iſoſceles)
Scalenum)
Rectangulum) ibid.
Obtuſangulum)
Acutangulum)
Æquilaterum eſt æquiangulum 19
Omne Parallelogrammi pars dimidia eſt 31
Trianguli Angulus qui majori lateri opponitur major eſt angulo qui opponitur minori: idem valet de latere quod majori angulo opponitur 23
Externus angulus duobus internis oppoſitis æqualis 27
ſingulis internis oppoſitis major ibid.
tres ſimul anguli duobus rectis æquales ibid.
latus perpendiculare acuto angulo oppoſitum 28
ſi unus angulus eſt rectus, vel obtuſus reliqui ſunt acuti ibid.

Alti-

Trianguli Altitudo & Baſis 36
Area ibid.
Sectio per perpendicularem 81
Latus medium proportionale 82
Triangula æqualia 17. 18. 21. 37
Joſoſcelia habent angulos ad baſim æquales 18
æquilatera ſunt æquiangula 19
latera æqualibus angulis oppoſita habent æqualia 19. 79
æquiangula 18. 79
inter eaſdem parallelas 37
ſimilia 78
Triangulorum anguli æqualibus lateribus oppoſiti æqnales 21
proportio 75. 88
ſectio proportionalis 76. 77
Similium proportio 89

V

Vertex Anguli 9

Vidit

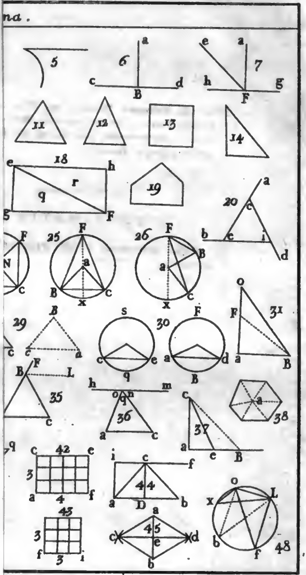
Vidit D. Salvator Corticellius Clericus Regularis Sancti Pauli, & in Eccleſia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiar. pro SS. D. N. Benedicto XIV Archiepiſcopo Bononiæ.

5 Julii 1753.

IMPRIMATUR.

Fr. Cæſar Antoninus Velaſti Provicarius S. Officii Bononiæ.

Digitized by Google

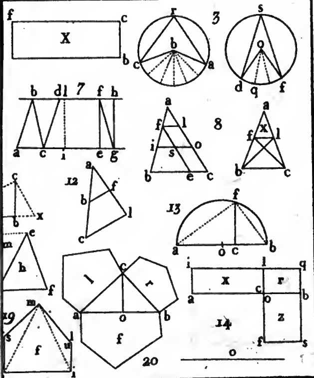


Digitized by Google

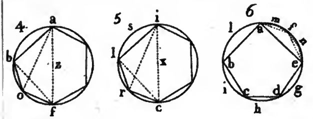


Digitized by Google

tera.



tia.





Digitized by Google

Digitized by Google

005654300